

CIRCUITE PLL

- Circuitul PLL(*Phase Locked Loop*) - 1932
- Conceput pentru implementarea unui procedeu de realizare a recepției sincrone a unui semnal de radiofrecvență modulat în amplitudine.
- Realizarea sa sub formă de circuit integrat, (analogică sau digitală, DPLL) a permis o largă aplicare a circuitului pentru:
 - demodularea semnalelor MF în prezența perturbațiilor
 - realizarea sintetizatoarelor de frecvență,
 - realizarea sincronizării de bit la transmisiuni cu MIC etc.
- Configurația circuitului PLL:

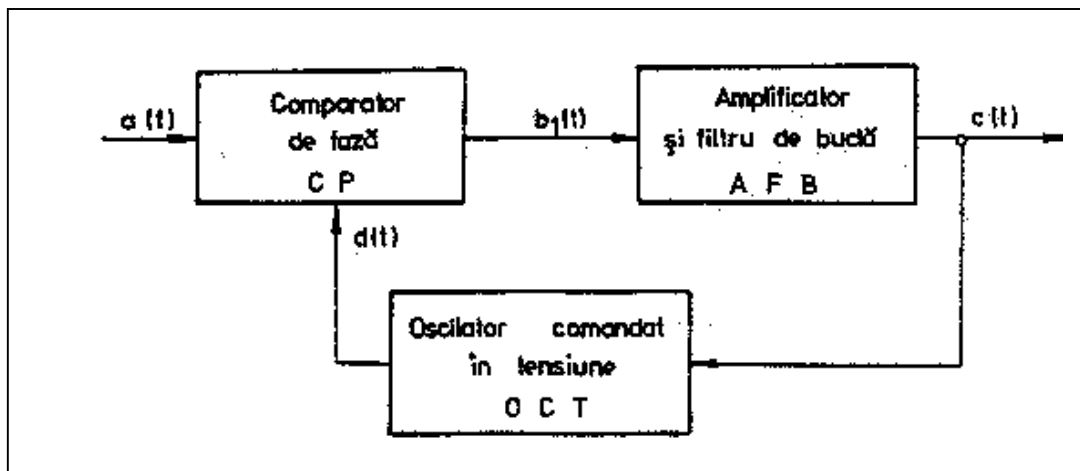


Fig. 1 Structura circuitului PLL

- Structură simplă dar analiza completă a circuitului necesită tratarea funcționării sale neliniare care, în condițiile în care semnalul aplicat la intrare este însumat cu zgomot, conduce la dificultăți majore.

1. Principiul de funcționare și elementele componente ale PLL

➤ faza unui oscilator propriu, numit *oscilator comandat în tensiune (OCT)*, este obligată să urmărească faza unui semnal aplicat la intrare.

➤ *Oscilatorul comandat în tensiune (OCT)* = un oscilator MF, de semnalul de comandă, $c(t)$, și având la ieșire semnalul, $d(t)$.

➤ Se poate scrie:

$$d(t) = -\frac{2}{X_o} \sin[\omega_r t + \varphi_r(t)] \quad (1)$$

în care :

- $f_r = \omega_r / 2\pi$ este frecvența centrală a OCT = valoarea medie a frecvenței instantanee;
- $\varphi_r(t)$ - modulația de fază a OCT.
- X_o - este amplitudinea semnalului $a(t)$ precizat mai departe

➤ **Observații:**

- Pentru amplitudinea lui $d(t)$ a fost aleasă o valoare convenabilă calculelor; nu are importanță în modul de tratare a circuitului;
- Frecvența centrală, f_r , este egală cu frecvența de oscilație liberă, f_{ro} , dacă semnalul de comandă $c(t)$ este nul.

➤ Legea de funcționare a OCT este:

$$\frac{d}{dt}[\omega_r t + \varphi_r(t)] - \omega_{ro} = K_3 c(t) \quad (2)$$

- Aici $K_3[\text{rad/s.V}]$ = panta OCT, măsurată în zona liniară a caracteristicii.

➤ *Amplificatorul și filtrul de buclă (AFB):*

- Factorul de transfer, $K_2 F(s)$ unde K_2 este câștigul amplificatorului.
- În majoritatea aplicațiilor funcția $F(s)$ există și $F(0)=1$;
- Filtrul este de tipul TJ; în general are o configurație simplă.

- Se notează : $h_f(t) = L^{-1} \{F(s)\} \quad (3)$

➤ *Detectorul de fază (DP)*

- are la cele două intrări:
 - Un semnal extern

$$a(t) = X_o \cos[\omega_i t + \varphi_i(t)] \quad (4)$$

Observație: amplitudinea X_o nu joacă nici un rol, deoarece semnalul $a(t)$ ajunge la intrarea DP după o limitare.

- semnalul $d(t)$ furnizat de OCT.
- Semnalul de la ieșire depinde monoton de eroarea de fază:

$$\varphi_e(t) = (\omega_i - \omega_r)t + \varphi_i(t) - \varphi_r(t) \quad (5)$$

- Variante de realizare detector de fază:
 1. *circuit de multiplicare analogic,*
 2. *sumator modulo 2 cu limitare prealabilă,*
 3. *medierea ieșirii unui bistabil comandat de fronturile semnalelor limitate.*

1. Pentru *circuitul de multiplicare analogic* se poate scrie

$$b(t) = K_I a(t)d(t) = K_I \sin \varphi_e(t) - K_I \sin[(\omega_i + \omega_r)t + \varphi_i(t) + \varphi_r(t)] \quad (6)$$

- După AFB :

$$b(t) = K_I \sin \varphi_e(t) \quad (7)$$

- Caracteristică *sinusoidală* (figura 2-a).
- Dacă $\omega_i = \omega_r$, (circuit PLL la sincronism) pentru $|\varphi_e(t)| \ll 1$ rad.

$$b(t) = K_I \varphi_e(t) \quad (8)$$

- Panta K_I [V/rad] a DP poate fi definită:

$$K_I = \frac{\Delta b[\text{V}]}{\Delta \varphi_e[\text{rad}]} \quad (9)$$

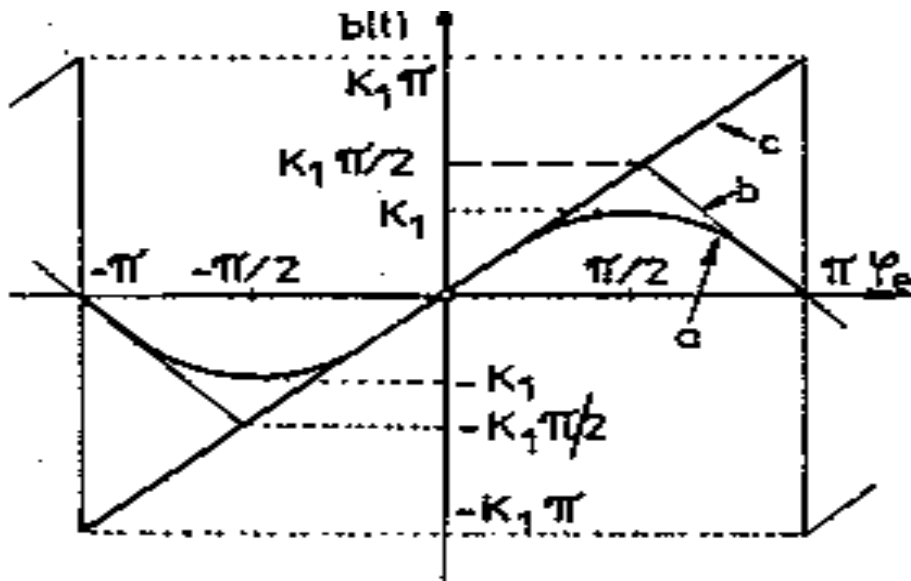


Fig. 2 Caracteristica detectorului de fază: a) *de tip sinusoidal*, b) *de tip triunghiular*, c) *de tip dinte de fierăstrău*.

2. Sumator modulo doi precedat de circuite de limitare:

$$b(t) = K_1 \arcsin[\sin \varphi_e(t)] \quad (10)$$

- Caracteristică *triunghiulară* (figura 2-b).

3. Medierea ieșirii unui circuit bistabil comandat de fronturile semnalelor $a(t)$ și $d(t)$ limitate:

$$b(t) = K_1 [\varphi_e(t) - (2k+1)\pi], \quad \varphi_e \in (2k\pi, (2k+2)\pi) \quad (11)$$

- Caracteristică - *dinte de fierăstrău* (figura 2-c)

➤ Pentru a urmări FUNCȚIONAREA CIRCUITULUI PLL se admite la început că sistemul este nesincronizat, (ex. bucla este întreruptă).

- Semnalul la intrarea PLL

$$a(t) = X_o \cos(\omega_i t + \varphi_{i0}) \quad (12)$$

- La ieșirea OCT

$$d(t) = -\frac{2}{X_o} \sin(\omega_{ro} t + \varphi_{ro}) \quad (13)$$

- fazele φ_{io} și φ_{ro} sunt constante.
- Pentru un DP cu caracteristică sinusoidală, semnalul de ieșire este

$$b(t) = K_I \sin[(\omega_i - \omega_{ro})t + \varphi_{io} - \varphi_{ro}] \quad (14)$$

- Dacă $|\omega_i - \omega_{ro}|$ nu depășește o anume valoare, după închiderea buclei urmează un regim tranzitoriu, până când $\omega_r = \omega_i$, - **sincronizarea**.
- Semnalul $d(t)$ devine

$$d(t) = -\frac{2}{X_o} \sin(\omega_i t + \varphi_r) \quad (15)$$

- la ieșirea AFB se obține

$$c(t) = K_I K_2 F(0) \sin(\varphi_{io} - \varphi_r) \quad (16)$$

- Pentru OCT este valabilă legea

$$\frac{d}{dt}(\omega_i t + \varphi_r) - \omega_{ro} = K_3 c(t) \quad (17)$$

- Deci:

$$\omega_i - \omega_{ro} = K_I K_2 K_3 F(0) \sin(\varphi_{io} - \varphi_r) \quad (18)$$

- Adică eroarea de fază $|\varphi_{io} - \varphi_r|$ scade atunci când $|\omega_i - \omega_{ro}|$ scade și atunci când câștigul buclei, $K = K_I K_2 K_3 F(0)$ crește.
- Se observă că diferența de fază tinde (aici) la de $\pi/2$ - **sinfazare**.

2. Ecuația de funcționare a circuitului PLL. Modelul liniar

- Pentru circuitul PLL analizat, se consideră că semnalele $a(t)$ și $d(t)$ au expresiile:

$$a(t) = X_o \cos(\omega_i t + \varphi_{io}) \quad (19)$$

$$d(t) = -\frac{2}{X_o} \sin(\omega_{ro} t + \varphi_{ro}) \quad (20)$$

- semnalul $b(t)$, este

$$b(t) = K_I a(t) d(t) = K_I \sin \varphi_e(t) - K_I \sin[(\omega_i + \omega_r)t + \varphi_i(t) + \varphi_r(t)] \quad (21)$$

➤ iar la ieșirea AFB rezultă

$$c(t) = K_I K_2 h_f(t) \otimes \sin \varphi_e(t) \quad (22)$$

➤ Conform relației (2) se poate scrie

$$\frac{d\varphi_r(t)}{dt} + \omega_r - \omega_{r0} = K_I K_2 K_3 h_f(t) \otimes \sin \varphi_e(t) \quad (23)$$

➤ Notând:

$$K = K_I K_2 K_3 \quad \dot{\varphi}(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt}$$

din relația (20) se obține:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_r(t) + \omega_r - \omega_{r0} &= K h_f(t) \otimes \sin \varphi_e(t) \\ \varphi_e(t) &= (\omega_i - \omega_r)t + \varphi_i(t) - \varphi_r(t) \end{aligned} \quad (24)$$

➤ **Ecuatiile (23) sunt ecuațiile de funcționare ale circuitului PLL.**

➤ Circuitul este sincronizat dacă $\omega_i = \omega_r$;

➤ La sincronism folosind notația

$$\Delta\omega_i = \omega_i - \omega_{r0} \quad (25)$$

➤ ecuațiile (23) devin:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_r(t) + \Delta\omega_i &= K h_f(t) \otimes \sin \varphi_e(t) \\ \varphi_e(t) &= \varphi_i(t) - \varphi_r(t) \end{aligned} \quad (26)$$

➤ Dacă se pune în evidență o componentă constantă φ_{r0} a fazei OCT:

$$\varphi_r(t) = \varphi_{r1}(t) - \varphi_{r0}, \quad (27)$$

➤ respectiv eroarea dinamică de fază:

$$\varphi_{e1}(t) = \varphi_i(t) - \varphi_{r1}(t), \quad (28)$$

➤ relația (28) devine

$$\dot{\phi}_{rl}(t) + \Delta\omega_i = K h_f(t) \otimes \sin[\phi_{el}(t) - \phi_{ro}] \quad (29)$$

- Dacă prin proiectarea circuitului PLL se asigură

$$|\phi_{el}(t)| \gg 1 \text{ rad} \quad (30)$$

- și se ține seama că

$$h_f(t) \otimes \sin\phi_{ro} = F(0)\sin\phi_{ro} \quad (31)$$

- ecuația (31) devine

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_{rl}(t) + \Delta\omega_i = K \cos\phi_{ro} h_f(t) \otimes \phi_{el}(t) - \\ - KF(0)\sin\phi_{ro} \end{aligned} \quad (34)$$

- Din relația (34) se obțin ecuațiile corespunzătoare modelului liniar al PLL în sincronism:

$$\begin{aligned} \Delta\omega_i = -KF(0)\sin\phi_{ro} \\ \dot{\phi}_{rl}(t) = K \cos\phi_{ro} h_f(t) \otimes \phi_{el}(t) \end{aligned} \quad (35)$$

- A doua ecuație exprimă funcționarea dinamică a circuitului PLL.
➤ Eroarea constantă de fază a OCT este

$$\phi_{ro} = -\arcsin \frac{\Delta\omega_i}{KF(0)} \quad (36)$$

- Din condiția evidentă

$$\left| \frac{\Delta\omega_i}{KF(0)} \right| < 1$$

- se determină valoarea maximă permisă pentru $\Delta\omega_i$:

$$B_u = 2\Delta f_i = \frac{1}{\pi} \Delta\omega_i = \frac{1}{\pi} |KF(0)|$$

- **B_u , banda de urmărire a circuitului PLL**
➤ Banda de prindere sau banda de captură, B_c ,
➤ Calculul B_c se poate face numai prin analiza ecuației neliniare.

3. Caracterizarea circuitelor PLL

- Se consideră ecuația care descrie funcționarea dinamică a circuitului PLL la sincronism:

$$\dot{\phi}_{rl}(t) = K \cos \phi_{ro} h_f(t) \otimes \phi_{el}(t)$$

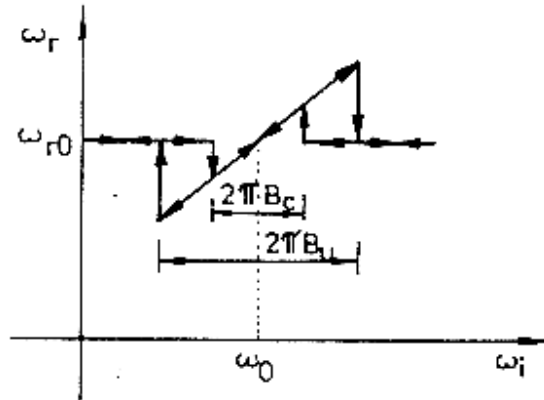


Fig. 3 Banda de urmărire (B_u) și banda de captură (B_c).

- Introducem transformatele Laplace

$$\Phi_{rl}(s) = L \{ \phi_{rl}(t) \}$$

$$\Phi_{el}(s) = L \{ \phi_{el}(t) \} \quad (32)$$

$$\Phi_i(s) = L \{ \phi_i(t) \}$$

- se obține

$$s\Phi_{rl}(s) = K \cos \phi_{ro} F(s)(\Phi_i(s) - \Phi_{rl}(s))$$

$$H(s) = \frac{\Phi_{rl}(s)}{\Phi_i(s)} = \frac{K_o F(s)}{s + K_o F(s)} \quad (33)$$

- Aici:

- $K_o = K \cos \phi_{ro}$, este câștigul modificat al buclei;
- $H(s)$ = funcția de transfer cu bucla închisă a circuitului PLL.

- Rezultă schema bloc:

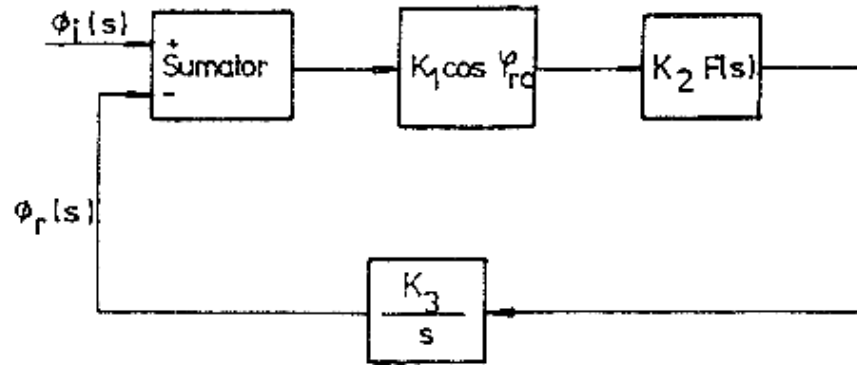


Fig. 4 Circuitul echivalent modelului liniar pentru regimul dinamic.

- Deschidem bucla prin întreruperea intrării $\Phi_{r1}(s)$ și se obține *funcția de transfer cu bucla deschisă (BD)* a circuitului PLL:

$$G(s) = \frac{\Phi_{r1}(s)}{\Phi_i(s)}|_{BD} = \frac{K_o F(s)}{s}.$$

- Se observă legătura:
$$H(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)}.$$
- **CIRCUITELE PLL se pot clasifica după ORDIN și după TIP;**
 - **Ordinul circuitului PLL** = numărul de poli pentru $G(s)$.
 - **Tipul circuitului PLL** = numărul de poli în origine pentru $G(s)$.
- *Tipul și ordinul circuitului PLL sunt determinate de structura FB.*

- Exemplu un PLL fără filtru trece jos este de *ordin 1 tip 1* iar structurile de filtre analizate mai departe determină circuite de *ordinul doi*.

- Abordând PLL cu diferite filtre se vor analiza următoarele aspecte:
 - stabilitatea circuitului, determinată de poziția polilor funcției $H(s)$
 - parametrii funcției de transfer $H(s)$,
 - parametrii funcției de transfer determinată pentru eroarea de fază;

$$H_e(s) = \frac{\Phi_{el}(s)}{\Phi_i(s)} = 1 - H(s)$$

- caracteristicile de frecvență ($H(j\omega)$ și $H_e(j\omega)$ - modul și argument).

- *Circuit PLL fără FTJ* (mai precis cu un FTJ care să permită numai eliminarea componentelor nedorite de la ieșirea CP):

$$F(s) = 1 \quad (34)$$

și se determină

$$H(s) = \frac{K_o}{s + K_o}, \quad K_o > 0. \quad (35)$$

- Deci circuitul este de *tipul unu și ordinul unu*
 ➤ *este necondiționat stabil.*
 ➤ **Observație:** semnul lui K_o .

- *Circuite PLL de ordinul 2:*

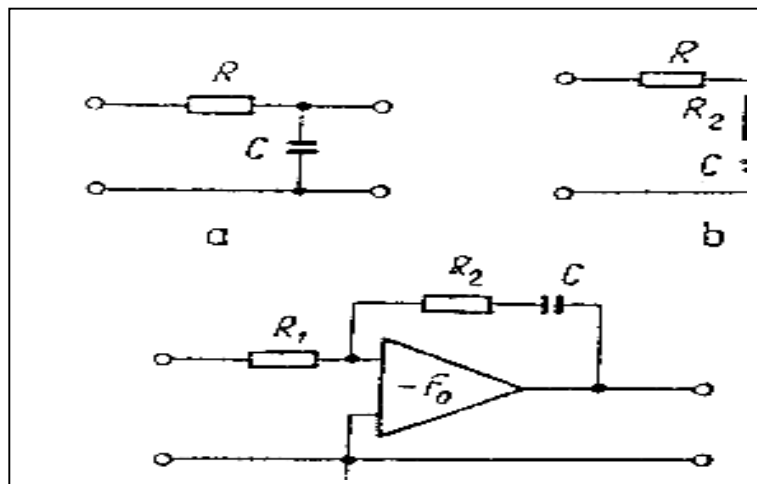


Fig. 5 Structuri de filtru trece-jos utilizate în componența circuitelor PLL.

- *Cel mai simplu filtru (figura 5-a)* are funcția de transfer

$$F(s) = \frac{I}{I + s\tau_I}, \quad \tau_I = RC,$$

$$G(s) = K \frac{F(s)}{s}; \quad H(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)}$$

- Circuit PLL corespunzător de *ordinul doi și tipul unu*.
- Se determină

$$H(s) = \frac{K_o}{\tau_I s^2 + s + K_o} = \frac{\omega_n}{s^2 + 2\xi \omega_n s + \omega_n^2}$$

$$H_e(s) = \frac{\tau_I s^2 + s}{\tau_I s^2 + s + K_o} = \frac{s^2 + 2\xi \omega_n s}{s^2 + 2\xi \omega_n s + \omega_n^2} \quad (36)$$

în care

$$\omega_n = \frac{K_o}{\tau_I} \qquad 2\xi \omega_n = \frac{1}{\tau_I}$$

- *Circuitul este necondiționat stabil.*
- *Structura de filtru din figura 5-b, are funcția de transfer*

$$F(s) = \frac{I + s\tau_2}{I + s\tau_I}, \quad \tau_2 = R_2 C, \quad \tau_I = (R_1 + R_2)C \quad (37)$$

- Circuit de *ordinul doi și tipul unu*.
- Se determină

$$H(s) = \frac{(2\xi \omega_n - \omega_n^2 / K_o)s + \omega_n^2}{s^2 + 2\xi \omega_n s + \omega_n^2}$$

$$H_e(s) = \frac{s^2 + (\omega_n^2 / K_o)s}{s^2 + 2\xi \omega_n s + \omega_n^2} \quad (38)$$

unde

$$\omega_n = \frac{K_o}{\tau_I}, \quad 2\xi \omega_n = \frac{1 + K_o \tau_2}{\tau_I} \quad (39)$$

- *Circuitul este necondiționat stabil.*
- *Structura de filtru activ din figura 5-c ; funcția de transfer*

$$F(s) = -F_o \frac{1+s\tau_2}{1+s\tau_1}, \quad (40)$$

$$\tau_2 = R_2 C, \tau_1 = (R_1 + F_o R_1 + R_2) C$$

- Este interesantă dacă câștigul F_o al AO este suficient de mare și:

$$F(s) = -F_o \frac{1+s\tau_2}{1+sR_1CF_o} \approx -\frac{1+s\tau_2}{s\tau_1} \quad (41)$$

$$\tau_1 = R_1 C, \tau_2 = R_2 C$$

- Circuit PLL de *ordin doi și tip doi*.
 ➤ Introducând notațiile

$$\omega_n^2 = \frac{K_o}{\tau_1}, \quad 2\xi\omega_n = \frac{K_o\tau_2}{\tau_1} \quad (42)$$

- se determină funcțiile de transfer

$$H(s) = \frac{2\xi\omega_n s + \omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$H_e(s) = \frac{s^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (43)$$

- *Circuitul este necondiționat stabil.*
- **Observație:** Nu s-a ținut cont de elementele parazite în studiul stabilității;

4. Comportarea tranzitorie a circuitului PLL sincronizat

- Circuit PLL este la sincronism - circuitul echivalent liniarizat în regim dinamic.
- Se studiază cazurile când semnalul de intrare este modulat cu:
- salt treaptă de fază,
 - salt treaptă de frecvență
 - rampă de frecvență.
- Rezultă:
- pentru salt treaptă de fază

$$\varphi_i(t) = \varphi_{io} \sigma(t), \Phi_i(s) = \frac{\varphi_{io}}{s}; \quad (44)$$

- pentru salt treaptă de frecvență

$$\dot{\varphi}_i(t) = \Delta \omega_o \sigma(t), \quad \Phi_i(s) = \frac{\Delta \omega_o}{s^2} \quad (45)$$

- pentru rampă de frecvență

$$\dot{\varphi}_i(t) = Rt \sigma(t), \quad \Phi_i(s) = \frac{R}{s^3} \quad (46)$$

- Se va determina $\varphi_{r1}(t)$ respectiv $\varphi_{e1}(t)$ pentru a verifica dacă este valabilă condiția pentru liniarizare.
- Intr-o primă etapă prezintă interes valoarea finală pentru $\varphi_{e1}(t)$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_{el}(t) = \varphi_{el}(\infty)$$

- Dacă:

- $|\varphi_{el}(\infty)| < 1 \text{ rad}$, în funcție de parametrii buclei, tipul și ordinul său este posibil ca circuitul PLL să se mențină în sincronism. Este necesară determinarea concretă a fazei $\varphi_{el}(t)$ și verificarea dacă $|\varphi_{el}(t)| < 1 \text{ rad}$ pentru $t > 0$;
- $|\varphi_{el}(\infty)| > 1 \text{ rad}$, modelul liniar nu este valabil și este probabilă ieșirea din sincronism datorită modulației semnalului aplicat.

- Din expresiile de mai sus se deduce o expresie generală

$$\Phi_i(s) = \frac{\alpha}{s^k}, \quad k \in \{1, 2, 3\}.$$

- Din teorema valorii finale se poate scrie

$$\varphi_{e1}(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \Phi_i(s) H_e(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \Phi_i(s) \frac{1}{1 + G(s)}$$

- Deci pentru circuit PLL de tip n rezultă

$$\lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\beta}{s^n} \quad \text{și} \quad \varphi_{el}(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s^{n+1-k} \frac{\alpha}{\beta}$$

➤ Adică:

- pentru $k = n+1$, $\varphi_{el}(\infty) = \alpha/\beta$ are valoare finită;
- pentru $k > n+1$, $\varphi_{el}(\infty) = \infty$, circuitul iese din sincronism,
- pentru $k < n+1$, $\varphi_{el}(\infty) = 0$ se poate păstra sincronismul și se poate realiza o urmărire bună a semnalului de intrare.

➤ Exemplu: *circuit PLL de tipul doi ($n=2$):*

- ◆ Pentru salt de fază ($k=1$) și pentru salt de frecvență ($k=2$), *eroarea finală este nulă*

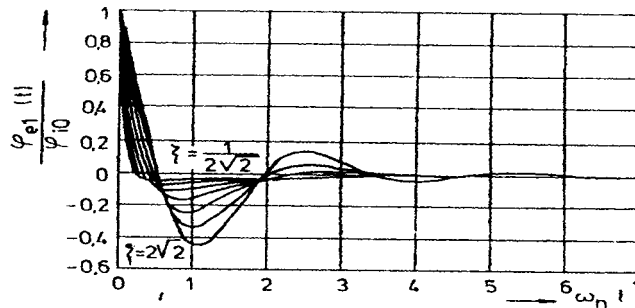


Fig. 6 $\varphi_{el}(t)/\varphi_{io}$ pentru PLL de ordin doi și tip doi (parametrii ξ și ω_n); $\varphi_i(t) = \varphi_{io}\sigma(t)$.

- ◆ Pentru rampa de frecv. ($k=3$), *eroarea de fază* $\varphi_{el}(\infty)$ este finită;

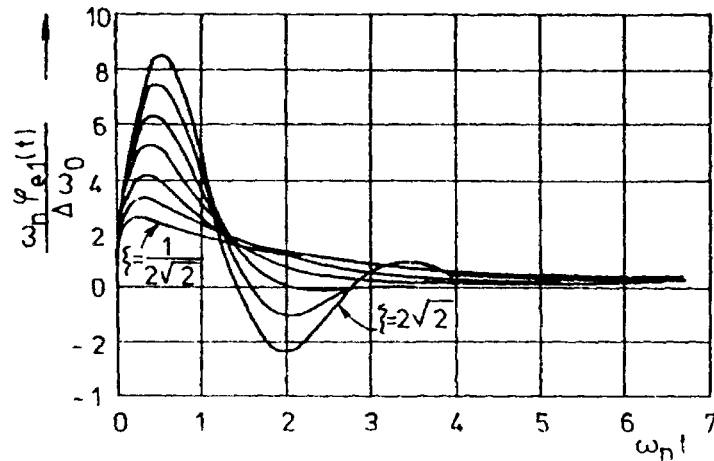


Fig. 7 $\omega_n \varphi_{e1}(t) / \Delta \omega_o$ pentru PLL de ordin doi și tip doi la semnal modulată cu salt de frecvență

- In ambele cazuri se constată că eroarea de fază este nulă în final.
- Cu toate acestea la o alegere neconvenabilă a parametrilor ξ și ω_n este posibil, ca la un moment dat o valoare mare pentru eroarea dinamică de fază $\varphi_{e1}(t)$ (figura 7) care să scoată circuitul din sincronism.

5. Răspunsul circuitului PLL sincronizat la semnal modulată armonic

- Se presupune valabil modelul liniar al circuitului PLL sincronizat.
- Pentru semnalul aplicat la intrare se consideră expresia

$$\varphi_i(t) = \Delta \varphi_i \cos \omega_m t \quad (47)$$

- se obține:

$$\begin{aligned} \varphi_{r1}(t) &= \Delta \varphi_r \cos(\omega_m t + \theta_r); \\ \varphi_{e1}(t) &= \Delta \varphi_e \cos(\omega_m t + \theta_e) \\ \Delta \varphi_r &= \Delta \varphi_i |H(j\omega_m)|, \\ \Delta \varphi_e &= \Delta \varphi_i |H_e(j\omega_m)| \\ \theta_r &= \arg H(j\omega_m), \\ \theta_e &= \arg H_e(j\omega_m) \end{aligned} \quad (50)$$

funcțiile $H(s)$ și $H_e(s)$ sunt precizate după ordinul și tipul buclei.

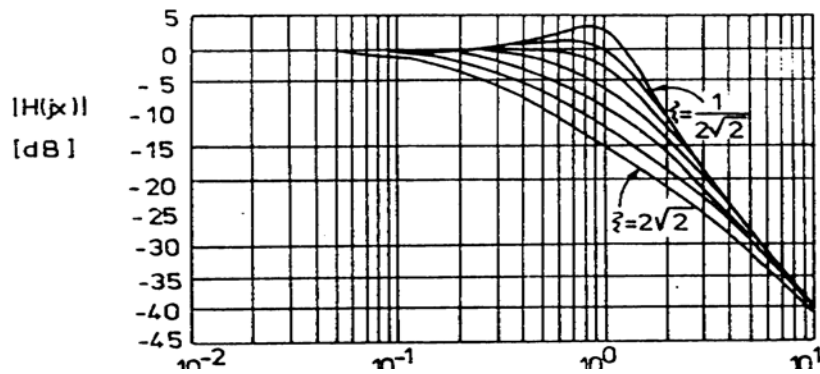


Fig. 8 Caracteristica de amplitudine a funcției de transfer $H(jx)$, $x=\omega/\omega_n$, pentru modelul liniar al circuitului PLL , având FB din figura 5-a.

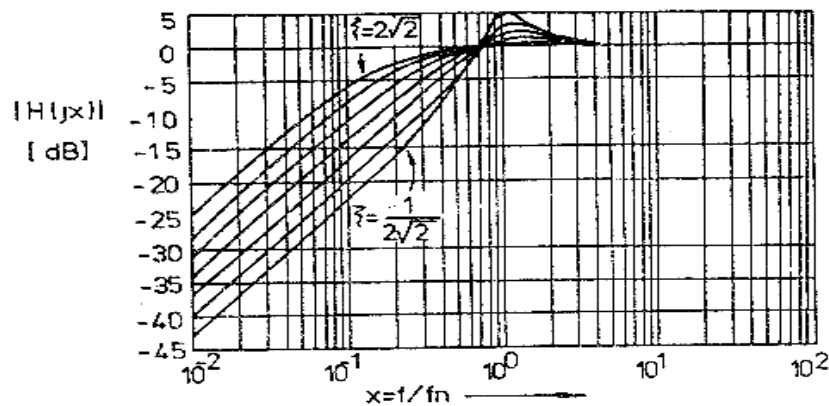


Fig. 9 Caracteristica de amplitudine a funcției de transfer $H_e(jx)$, $x=\omega/\omega_n$, pentru modelul liniar al circuitului PLL cu FB din fig. 5-a.

➤ Din analiza diagramelor rezultă:

- dacă ω_m este mai mică decât ω_n , replica OCT are faza $\varphi_{r1}(t)$ practic identică cu faza $\varphi_i(t)$ a semnalului aplicat. Eroarea de fază $\varphi_{e1}(t)$ este de amplitudine mică;
- dacă ω_m este mai mare decât ω_n , modulația semnalului de intrare nu este transferată semnalului furnizat de OCT iar eroarea de fază $\varphi_{e1}(t)$ poate lua valori mari în funcție de $\Delta\varphi_i$ și parametrii circuitului.

➤ Cu ajutorul caracteristicilor reprezentate fig. 9, se determină parametrii circuitului în funcție de semnalul aplicat astfel încât eroarea de fază să ia valori acceptabile.

➤ O eroare de fază mică face ca semnalul la ieșirea OCT să fie similar semnalului de intrare.

- Semnalul de comandă a OCT fiind proporțional cu derivata fazei $\varphi_{r1}(t)$, se realizează demodularea semnalelor modulate în frecvență, prin extragerea semnalului $c(t)$.

6. Funcționarea neliniară; Intrarea în sincronism

- Notăm semnalul aplicat circuitului PLL la momentul $t=0$

$$\begin{aligned} a(t) &= X_o \cos(\omega_{ro} t + \Delta \omega_i t + \varphi_{io}), t \geq 0, \\ \varphi_{io}(t) &= \Delta \omega_i t + \varphi_{io} \end{aligned} \quad (48)$$

- iar semnalul la ieșirea OCT

$$d(t) = -\frac{2}{X_o} \sin[\omega_{ro} t + \varphi_{ro}(t)], \forall t \quad (49)$$

unde

$$\varphi_{ro}(t) = 0, \quad t \leq 0 \quad (50)$$

- Pentru DP cu caracteristică de tip sinusoidal rezultă:

$$\begin{aligned} c(t) &= K_1 K_2 h_f(t) \otimes b(t) \\ b(t) &= \sin \varphi_{eo}(t), \varphi_{eo}(t) = \varphi_{io}(t) - \varphi_{ro}(t) \end{aligned} \quad (51)$$

- Conform ecuației de funcționare a OCT, se poate scrie

$$\dot{\varphi}_{ro}(t) = K h_f(t) \otimes \sin \varphi_{eo}(t), K = K_1 K_2 K_3 \quad (52)$$

- Ținând seama de expresia semnalului de intrare:

$$\dot{\varphi}_{eo}(t) - \Delta \omega_i = -K h_f(t) \otimes \sin \varphi_{eo}(t) \quad (53)$$

- Introducând operatorul de derivare $p=d/dt$:

$$\dot{\varphi}_{eo}(t) - \Delta \omega_i = -KF(p) \sin \varphi_{eo}(t) \quad (54)$$

- Deoarece $F(p)$ este un raport de două polinoame

$$F(p) = \frac{a_0 + a_1 p}{b_0 + b_1 p} \quad (55)$$

- relația (54) poate fi rescrisă

$$(b_0 + b_1 p)[\dot{\varphi}_{eo}(t) - \Delta \omega_i] = -K(a_0 + a_1 p) \sin \varphi_{eo}(t) \quad (56)$$

- Analiza prin metoda planului fazelor $(\varphi_{eo}, \dot{\varphi}_{eo})$;
- Traectoria descrisă de sistem conform ecuației analizate se determină pornind din punctul de coordonate

$$\varphi_{eo}(0) = \lim_{t \rightarrow 0} [\varphi_{io}(t) - \varphi_{ro}(t)] = \varphi_{io} \quad (73)$$

$$\dot{\varphi}_{eo}(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \dot{\varphi}_{eo}(t) \quad (74)$$

- traectoria descrisă se determină prin metoda creșterilor finite.
- Punctul vecin celui de plecare are coordonatele:

$$\begin{aligned} \varphi_{eo}(t_1) &= \varphi_{eo}(0) + \Delta\varphi_{eo}, \\ \dot{\varphi}_{eo}(t_1) &= \dot{\varphi}_{eo}(0) + \left. \frac{d\dot{\varphi}_e}{d\varphi_e} \right|_{t=0} \Delta\varphi_{eo} \end{aligned} \quad (75)$$

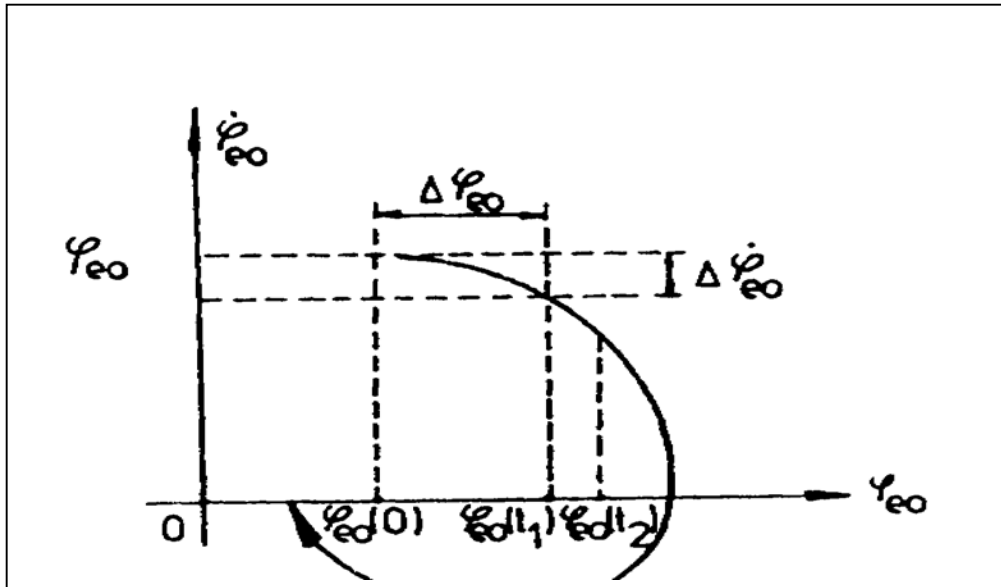


Fig. 10 Exemplu de traectorie în planul fazelor $(d\varphi_{eo}/dt, \varphi_{eo})$

- Se observă că pentru $\dot{\varphi}_{eo} > 0$ deplasarea se face în sensul creșterii fazei φ_{eo} , iar pentru $\dot{\varphi}_{eo} < 0$ în sensul scăderii fazei φ_{eo} .
- Pentru $\dot{\varphi}_{eo} = 0$ se poate obține o stare de echilibru stabil.
- Timpul necesar deplasării dintr-un punct al traiectoriei în altul se determină prin relația evidentă

$$t_2 - t_1 = \int_{\varphi_{eo}(t_1)}^{\varphi_{eo}(t_2)} \frac{d\varphi_{eo}}{\dot{\varphi}_{eo}} \quad (76)$$

- Exemplu: circuitul PLL de ordin 1 și tip 1 pentru care $F(s)=1$.
- Ținând cont că

$$b_o=a_o=1, b_I=a_I=0 \quad (77)$$

- se obține

$$\dot{\varphi}_{eo}(t) = -K \sin \varphi_{eo}(t) + \Delta\omega_i$$

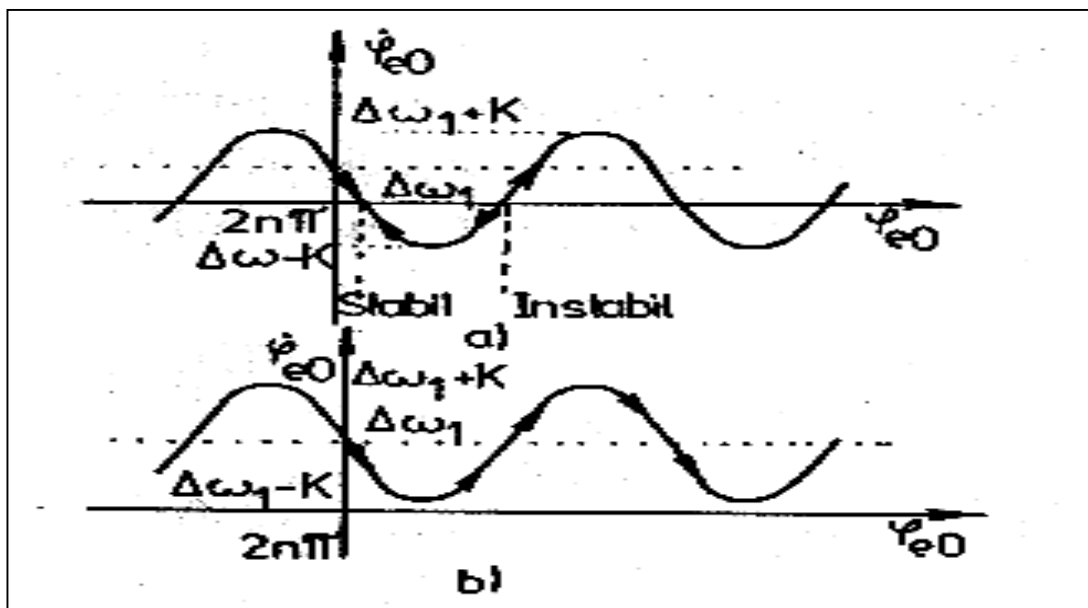


Fig. 11 Traectoria din planul fazelor pentru circuitul PLL de ordin unu și tip unu. a) cazul $|\Delta\omega_i| < k$, b) cazul $|\Delta\omega_i| > k$.

- S-a presupus:

$$\varphi_{eo}(0) = \varphi_{io} = 2n\pi \quad (78)$$

și a rezultat

$$\dot{\varphi}_e(0) = \Delta\omega_i \quad (79)$$

A. $|\Delta\omega_i| < K$; punctele stabile de funcționare:

$$\frac{d\dot{\varphi}_{eo}}{d\varphi_{eo}} < 0, \quad \dot{\varphi}_{eo} = 0 \quad (80)$$

- Punctul stabil către care tinde sistemul este caracterizat de

$$\varphi_{eo}(\infty) = 2n\pi + \arcsin(\Delta\omega_i/K) \quad (81)$$

- Timpul necesar parcurgerii traiectoriei din $\varphi_{eo}(0)$, în $\varphi_{eo}(t_2)$ este

$$t_2 = \int_{\varphi_{eo}(0)}^{\varphi_{eo}(t_2)} \frac{d\varphi_{eo}}{\Delta\omega_i - K \sin \varphi_{eo}} \quad (82)$$

- Dacă limita superioară se înlocuiește prin valoarea corespunzătoare punctului stabil, integrala devine improprie și rezultă t_2 infinit.
- Cu alte cuvinte timpul de sincronizare t_s este infinit.
- Timpul de sincronizare se determină considerând o vecinătate oricât de mică a punctului de echilibru stabil

$$|\varphi_{eo}(t_2) - \varphi_{eo}(\infty)| < \delta \quad (83)$$

$$t_2 = \frac{2\ln(2/\delta)}{K \cos \varphi_{eo}(\infty)} \quad (84)$$

B. $|\Delta\omega_i| > K$; $\dot{\varphi}_{eo} > 0$ permanent; nu există un punct de echilibru.

- Circuitul PLL nu se sincronizează.

➤ De remarcat că pentru circuitul PLL de ordin unu și tip unu banda de urmărire este egală cu banda de prindere în sincronism.

- Pentru circuitele PLL de ordinul doi reprezentarea traiectoriilor din planul fazelor nu se poate face decât cu ajutorul unui calculator numeric sau analogic.
- În figura 12 este reprezentată traiectoria din planul fazelor pentru factorul de amortizare $\xi = \sqrt{2}/2$
- Reprezentarea este efectuată prin reducerea erorii de fază φ_{eo} în domeniul $[-\pi, \pi]$.



Fig. 12 Traiectoria din planul fazelor, redusă în domeniul $\varphi_{eo} \in (-\pi, \pi)$ pentru un circuit PLL de ordin doi și tip doi având factorul de amortizare $\xi = \sqrt{2}/2$.

- Punctul stabil de echilibru corespunzător este dat de coordonatele:

$$\dot{\varphi}_{eo} = 2n\pi, \varphi_{eo} = 0$$

și este atins indiferent de condițiile inițiale.

- Banda de prindere în sincronism este infinită (rezultatul trebuie încadrat condițiilor în care modelul adoptat este valabil)
- nu depinde de câștigul K al buclei (vezi integratorul "perfect").
- S-a calculat că timpul de sincronizare este:

$$t_s = \frac{\Delta\omega_i^2}{2\xi\omega_n^3} \quad (85)$$

- Pentru circuitul PLL având filtrul de buclă cu funcția de transfer cu un zero și cu detector de fază cu caracteristică de tip sinusoidal:

$$B_c = \frac{2}{\pi} \sqrt{K(\xi \omega_n + \frac{1}{2\tau_i})} \approx \frac{2}{\pi} \sqrt{K\xi \omega_n},$$

$$B_u = \frac{K}{\pi} \quad (86)$$

7. Funcționarea circuitului PLL în prezența zgomotului

- Se consideră semnalul la intrarea circuitului PLL format din:

- semnalul util
- zgomot alb gaussian $n(t)$ (N_0)

$$a(t) = X_o \cos(\omega_i t + \varphi_i) + n(t) \quad (87)$$

- Se presupune că circuitul PLL este precedat de un FTB ideal cu frecvența centrală ω_i și lărgimea benzii de frecvență $B[\text{Hz}]$.
- Zgomotul $n(t)$ poate fi scris

$$n(t) = x(t) \cos \omega_i t + y(t) \sin \omega_i t \quad (88)$$

- $x(t)$ și $y(t)$ sunt zgomote de joasă frecvență reprezentând procese aleatoare de tip gaussian, staționare, statistic independente, cu valoarea medie nulă și densitatea spectrală a puterii $2N_0[\text{W/Hz}]$ constantă în domeniul de frecvențe $f \in (0, B/2)$.
- Procesele sunt ergodice mediile temporare sunt egale cu cele statistice deci:

$$\overline{x^2(t)} = \overline{y^2(t)} = \overline{n^2(t)} = N_0 B \quad (89)$$

- Circuitul PLL fiind în sincronism, semnalul furnizat de OCT este

$$d(t) = -\frac{2}{X_o} \sin(\omega_i t + \varphi_r) \quad (90)$$

- Semnalul obținut la ieșirea DP ținând cont de prezența AFB este

$$b(t) = K_I \sin(\varphi_i - \varphi_r) + K_I \frac{y}{X_o} \cos \varphi_r - K_I \frac{x}{X_o} \sin \varphi_r =$$

$$= K_I \sin(\varphi_i - \varphi_r) + K_I n_o(t) \quad (91)$$

$$n_o(t) = \frac{y(t)}{X_o} \cos \varphi_r - \frac{x(t)}{X_o} \sin \varphi_r \quad (92)$$

- Se presupune că variația fazei φ_r este mult mai lentă decât a zgomotelor $x(t)$ și $y(t)$.
- Valabil dacă B este mult mai mare ca B_z (definită mai departe).
- Mediile temporare (egale cu cele statistice)

$$\overline{n_o(t)} = 0, \quad \overline{n_o^2(t)} = \frac{N_o B}{X_o^2} \quad (93)$$

- $n_o(t)$ este un zgomot echivalent de joasă frecvență, de tip gaussian, cu valoare medie nulă și densitate spectrală a puterii

$$N_o/X_o^2 \text{ pentru } f \in (-B/2, B/2).$$

- Relația

$$b(t) = K_I \sin(\varphi_i - \varphi_r) + K_I n_o(t)$$

conduce la schema echivalentă liniară a circuitului PLL în prezența zgomotului

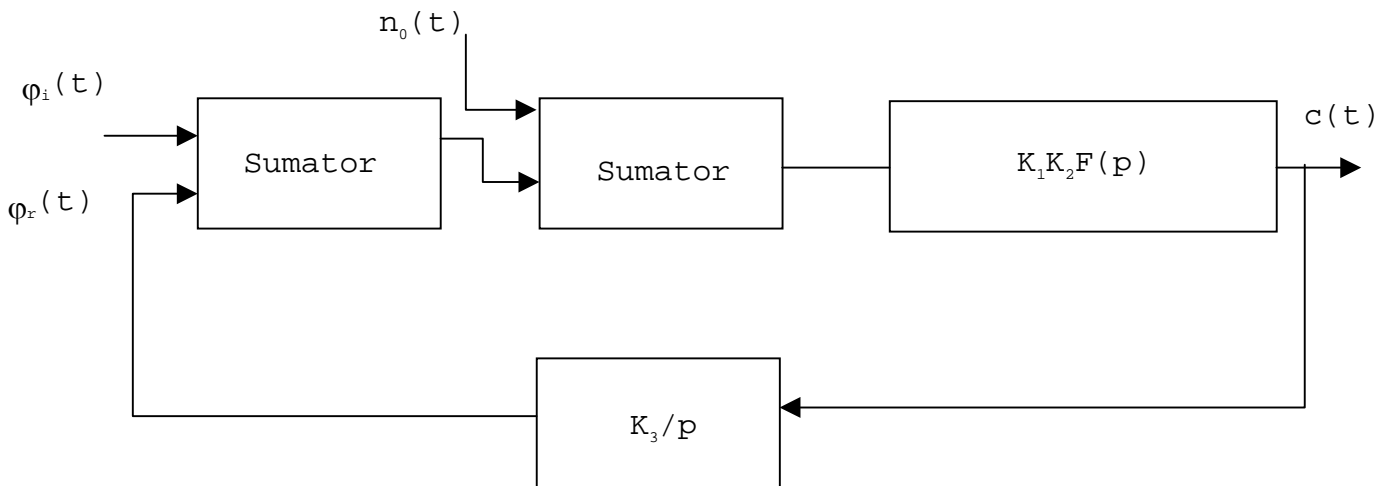


Fig. 13 Schema echivalentă liniară a circuitului PLL în prezența zgomotului.

➤ Dacă $\varphi_i(t)=0$ atunci $\varphi_{r1}(t)$ este datorat în exclusivitate zgomotului.

➤ Se obține

$$\frac{F \{ \varphi_{r1}(t) \}}{F \{ n_o(t) \}} = H(j\omega)$$

➤ S-a considerat $\cos\varphi_{r0} \approx 1$.

➤ Circuitul echivalent cu factorul de transfer $H(j\omega)$ fiind liniar, rezultă că $\varphi_{r1}(t)$ este zgomot staționar gaussian de valoare medie nulă și densitate spectrală a puterii

$S_{r1}(f)$ [rad²/Hz] pentru $f \in (-B/2, B/2)$ dată de

$$S_{r1}(f) = \frac{N_o}{X_o^2} |H(j2\pi f)|^2$$

➤ Se determină valoarea medie pătratică σ_{r1}^2 a fazei $\varphi_{r1}(t)$ din relația

$$\sigma_{r1}^2 = \frac{N_o}{X_o^2} \int_{-W/2}^{W/2} |H(j2\pi f)|^2 df \approx \frac{2 N_o}{X_o^2} B_n \quad (94)$$

➤ unde B_n este banda de zgomot a circuitului PLL cu definiția

$$B_n = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(j2\pi f)|^2 df = \int_0^{\infty} |H(j2\pi f)|^2 df \quad (95)$$

➤ Se găsesc valorile benzilor de zgomot după cum urmează:

- circuitul de ordinul doi și tipul unu

$$B_n = \frac{K_o}{4} \quad (96)$$

- circuitul de ordinul doi și tipul doi

$$B_n = \frac{\omega_n}{8\xi} (1 + 4\xi^2) \quad (97)$$

- Circuitul de ordinul doi și tip unu:

$$B_n = \frac{K_o}{4} \quad (98)$$

- circuitul de ordinul doi și tipul unu

$$B_n = \frac{\omega_n}{8\xi} \left[1 + \left(2\xi - \frac{\omega_n}{K_o} \right)^2 \right] \quad (99)$$

8. Filtru de urmărire realizat cu un circuit PLL

- Un filtru de urmărire este un filtru trece-bandă a cărui frecvență centrală urmărește valoarea frecvenței instantanee a semnalului prelucrat.
- Circuitele PLL reprezintă o modalitate foarte convenabilă pentru a implementa asemenea filtre.
- Fie un semnal care conține componenta utilă modulată în fază

$$a_1(t) = X_o \cos[\omega_i t + \varphi_i(t)] \quad (100)$$

datorită prezenței zgomotului $n(t)$ de bandă îngustă.

- Extragerea semnalului util se realizează optimal, după Wiener [18] dacă se minimizează abaterea medie pătratică dintre semnalul filtrat și semnalul util.
- Pentru circuitul PLL având semnalul $a_1(t)$ aplicat la intrare ieșirea OCT poate fi considerată ca o variantă a componentei utile filtrată optim, dacă se minimizează abaterea medie pătratică

$$\overline{[\varphi_{r1}^2(t) - \varphi_i^2(t)]} \quad (101)$$

- Folosind modelul liniar se definește semnalul de intrare

$$y(t) = \varphi_i(t) + n_o(t) \quad (102)$$

- Densitatea spectrală de putere a semnalului $y(t)$ poate fi scrisă

$$S_y(\omega) = \Phi_y(\omega) \Phi_y^*(\omega); \quad \Phi_y(\omega) = \mathfrak{T}\{\varphi_i(t)\} \quad (103)$$

- Tinând seama că densitatea spectrală a puterii zgomotului $n_o(t)$, considerată pentru frecvențe pozitive și negative, este N_o/X_o^2 , rezultă funcția de transfer optimă

$$H(j\omega) = 1 - \frac{\sqrt{\frac{N_o}{X_o^2}}}{\Phi_y(\omega)} \quad (104)$$

EXEMPLE:

1. Salt de fază

$$\varphi_i(t) = \Delta\varphi_i \sigma(t) \quad (105)$$

se obține

$$S_y(\omega) = \frac{\Delta\varphi_i^2}{2} + \frac{N_o}{X_o^2} \quad (106)$$

- Se deduce funcția de transfer a filtrului optim

$$H_o(j\omega) = \frac{B_o}{j\omega + B_o}, \quad B_o = \frac{\Delta\varphi_i^2 X_o^2}{N_o} \quad (107)$$

- Comparând cu funcția de transfer obținută pentru modelul liniar al circuitului PLL de ordin unu și tip unu, se obține relația $K=B_o$.
- Se constată că valoarea optimă K depinde de valoarea saltului de fază și de raportul semnal-zgomot la intrare.
- La raport semnal-zgomot mic trebuie micșorat K , astfel încât banda de zgomot să fie mai mică.

2. Salt de frecvență

$$\dot{\varphi}_i(t) = \Delta\omega \sigma(t) \quad (108)$$

- se determină

$$S_y(\omega) = \frac{\Delta\omega^2}{4} + \frac{N_o}{X_o^2} \quad (109)$$

- funcția de transfer a filtrului optim este

$$H_o(j\omega) = \frac{B_l^2 + j\omega\sqrt{2} B_l}{B_l^2 - \omega^2 + j\omega\sqrt{2} B_l}, \quad B_l^2 = \Delta\omega \sqrt{\frac{X_o^2}{N_o}} \quad (110)$$

- Această funcție de transfer corespunde modelului liniar al circuitului PLL de ordin doi și tip doi (53). Prin comparare se obțin parametrii

$$\xi = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \omega_n^2 = B_l^2 \quad (111)$$

CONCLUZII:

- Este evident că filtrarea optimală în sensul adoptat de Wiener poate fi făcută pentru anume categorii de semnale de intrare, structura circuitului PLL depinzând de semnal.
- Discutând la modul general de realizarea unei curățiri a semnalului util $a_1(t)$ de zgomotul aditiv, cu alte cuvinte de obținerea filtrului de urmărire cu ajutorul circuitului PLL sunt valabile următoarele recomandări:
- Cu cât ω_n este mai mic cu atât banda de zgomot este mai mică, deci efectul zgomotului micșorat.
 - Valoarea frecvenței naturale ω_n nu se micșorează oricât pentru a asigura o bandă de captură (88) corespunzătoare aplicației date.