

## ***9 SEMNALE CU MODULAȚIE EXPONENȚIALĂ***

### **9.1 Semnale cu modulație în frecvență (MF)**

$$s_{MF}(t) = U_o \cos[\omega_o t + k_{MF} \int g(\theta) d\theta] \quad (9.1)$$

Un semnal cu modulație în frecvență are expresia [3],[4]

în care:

$\omega_o$  este frecvența unghiulară purtătoare;

$g(t)$  - semnalul modulator;

$k_{MF}$  - constanta de conversie a modulatorului în frecvență.

ținând seama de reprezentarea semnalului modulator sub forma

$$g(t) = U_m f(t), \quad \max |f(t)| = 1 \quad (9.2)$$

în care:  $U_m$  este amplitudinea semnalului modulator iar  $f(t)$  - semnalul modulator normat.

Semnalul modulat în frecvență poate fi scris

*Transmisiuni Analogice și Digitale: Semnale cu Modulație Exponențială și  
Tehnica producerii semnalelor cu modulație exponențială*

$$s_{MF}(t) = U_o \cos[\omega_o t + \Delta\omega \int_0^t f(\theta) d\theta] \quad (9.3)$$

Deviația de frecvență unghiulară

$$\Delta\omega = k_{MF} U_m \quad (9.4)$$

este proporțională cu amplitudinea  $U_m$  a semnalului modulator. Frecvența instantanee a semnalului este:

$$\omega_i(t) = \omega_o + \Delta\omega f(t) \quad (9.5)$$

În cazul semnalului modulator sinusoidal

$$g(t) = U_m \cos\omega_m t, \quad f(t) = \cos\omega_m t \quad (9.6)$$

semnalul modulat în frecvență se scrie sub forma

$$s_{MF}(t) = U_o \cos(\omega_o t + \beta \sin \omega_m t) \quad (9.7)$$

în care parametrul

$$\beta = \frac{\Delta\omega}{\omega_m} \quad (9.8)$$

se numește indicele de modulație în frecvență.

Cu notația

$$\varphi_v(t) = \Delta\omega \int_0^t f(\theta) d\theta \quad (9.9)$$

se scrie anvelopa complexă a semnalului MF

$$\underline{S}_{MF}(t) = U_o e^{j\varphi_v(t)} \quad (9.10)$$

având evident expresia

$$s_{MF}(t) = \operatorname{Re}\{\underline{S}_{MF}(t) e^{j\omega_o t}\} \quad (9.11)$$

Tinând seama că [4]

$$e^{j a \sin b} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(a) e^{j k b} \quad (9.12)$$

unde  $J_k(a)$  reprezintă funcția Bessel de speța I-a, de ordin  $k$  și argument  $a$ , pentru semnalul modulator sinusoidal (9.6), rezultă

$$\underline{s}_{MF}(t) = U_o e^{j \beta \sin \omega_m t} = U_o \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(\beta) e^{j k \omega_m t} \quad (9.13)$$

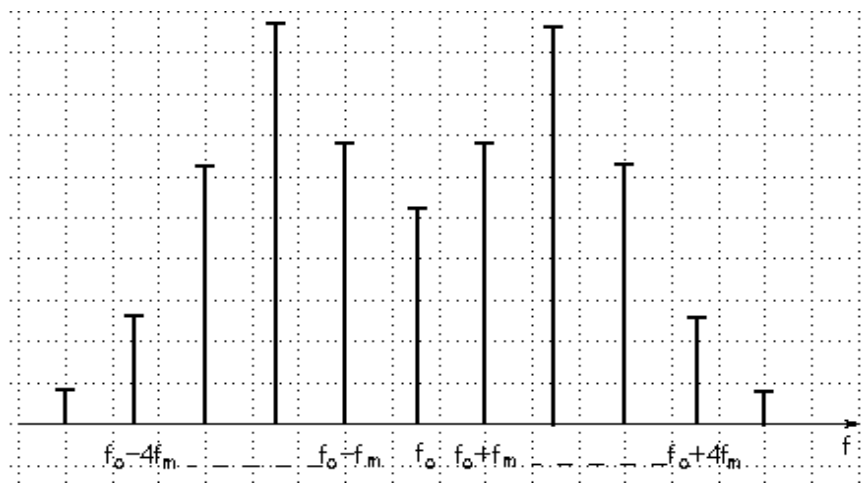
Se obține descompunerea în componente a semnalului modulat în frecvență  
(9.7)

$$s_{MF}(t) = U_o \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(\beta) \cos[(\omega_o + k \omega_m) t] \quad (9.14)$$

Funcțiile Bessel de speța a I-a,  $J_k(\beta)$ , de ordin  $k$  și argument  $\beta$  au proprietatea

$$J_{-k}(\beta) = (-1)^k J_k(\beta) \quad (9.15)$$

motiv pentru care spectrul de amplitudine corespunzător descompunerii (9.14) este simetric în raport cu frecvența purtătoare. Pe de altă parte numărul de componente care formează spectrul semnalului modulat este *infinit*.



**Figura 9.1**

ținând seama de relația

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k^2(\beta) = 1 \quad (9.16)$$

se constată că puterea semnalului (9.7) este  $U_o^2/2$ . Lărgimea de bandă ocupată de semnal se definește pe considerente energetice ca fiind domeniul de frecvențe axat în jurul frecvenței purtătoare care cuprinde componentele care determină 99% din puterea semnalului.

Pentru calculul lărgimii de bandă ( $B$ ) ocupată de semnalul MF (9.7) se utilizează o formulă de aproximare datorată lui Carson [3],[10]

$$B = 2 f_m (1 + \beta + \sqrt{\beta}) \quad (9.17)$$

În cazul unei transmisiuni cu modulație în frecvență pentru care  $f_m \in [f_{mm}, f_{mM}]$  și  $\Delta f \leq \Delta f_M$  ( $\Delta f_M$  se numește deviația de frecvență maximă) se definește indicele de modulație în frecvență al transmisiunii

$$\beta_{tr} = \frac{\Delta f_M}{f_{mM}} \quad (9.18)$$

Lărgimea de bandă ocupată de transmisiune se determină cu relația (9.17)

$$B_{tr} = 2 f_{mM} (1 + \beta_{tr} + \sqrt{\beta_{tr}}) \quad (9.19)$$

În cazul transmisiunii monofonice pe unde ultracurte, cu modulație în frecvență, pentru care  $\Delta f_M = 50$  kHz și  $f_{mM} = 15$  kHz se obține  $\beta_{tr} = 3,33$  și  $B_{tr} = 184$  kHz.

## **9.2 Semnale cu modulație în fază(MP)**

Un semnal cu modulație în fază poate fi scris

$$s(t) = U_o \cos[\omega_o t + k_{MP} g(t)] \quad (9.20)$$

unde  $k_{MP}$  reprezintă panta modulatorului de fază, iar celelalte mărimi au aceeași

*Transmisiuni Analogice și Digitale: Semnale cu Modulație Exponențială și  
Tehnica producerii semnalelor cu modulație exponențială*

semnificație ca la semnale MF. Folosind scrierea semnalului modulator sub forma normată (9.2) și notând

$$\Delta\varphi = k_{MF} U_m \quad (9.21)$$

deviația maximă de fază, expresia (9.20) poate fi scrisă

$$s(t) = U_o \cos[\omega_o t + \Delta\varphi f(t)] \quad (9.22)$$

Ca și pentru semnale MF analiza proprietăților spectrale se face pentru cazul semnalelor modatoare sinusoidale, când expresia (9.22) poate fi scrisă

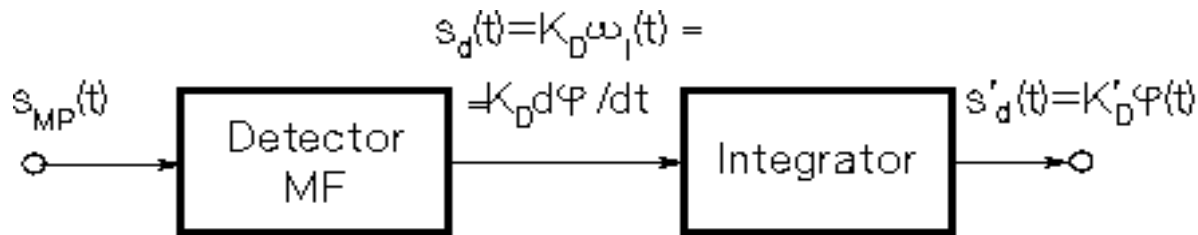
$$s(t) = U_m \cos(\omega_o t + \Delta\varphi \cos\omega_m t) \quad (9.23)$$

În aceleași condiții ca în paragraful precedent se obține descompunerea în componente a semnalului (9.23)

$$s_{MF}(t) = U_o \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(\beta) \cos[(\omega_o + k\omega_m)t + k\frac{\pi}{2}] \quad (9.24)$$

Observând relațiile care descriu semnalele cu modulație în fază prin comparație cu cele cu modulație în frecvență, în cazul în care semnalul modulator este analogic, ca și dezvoltările în componente corespunzătoare, rezultă următoarele concluzii:

- banda ocupată este aceeași atâta timp cât se poate realiza  $\beta = \Delta\varphi$ , dar distribuția energiei în spectru pentru semnale nesinusoidale este diferită;
- semnalele cu modulație în fază nu pot realiza  $\Delta\varphi > 3$ , deci nu pot fi utilizate pentru transmisiuni cu bandă foarte largă;
- procedeele de prelucrare folosite pentru unul dintre cele două semnale pot fi extinse pentru celălalt cu modificări minime; de exemplu un semnal MP poate fi prelucrat cu un demodulator MF dacă după acesta se adaugă un integrator (figura 9.2).



**Figura 9.2**

### **9.3 Semnale cu modulație în frecvență folosite pentru transmiterea semnalelor numerice**

Aspectul caracteristic pentru aceste semnale constă în faptul că pe durata afectată transmiterii unui bit sau unui grup de biți, durată cunoscută sub denumirea de *perioadă de semnalare*, se transmite un semnal sinusoidal cu frecvență fixă, fie aceasta  $f_k$ . Valoarea frecvenței  $f_k$  se alege dintr-un set de  $2^m$  valori preselectate; varianta folosită cel mai des este varianta binară când setul are două valori și când perioada de semnalare coincide cu durata unui bit. Dacă în perioada considerată semnalul numeric are valoarea "0" se transmite un semnal cu frecvența  $f_1$  iar dacă are valoarea "1" se transmite un semnal cu frecvența  $f_2$  (figura 9.3-b). Din acest motiv semnalele analizate sunt cunoscute sub denumirea de semnale cu *deplasare de frecvență* (MDF), semnale cu *frecvențe comutate* (CMF) sau, în literatura de limba engleză, semnale *Frequency Shift-Keying* (FSK).

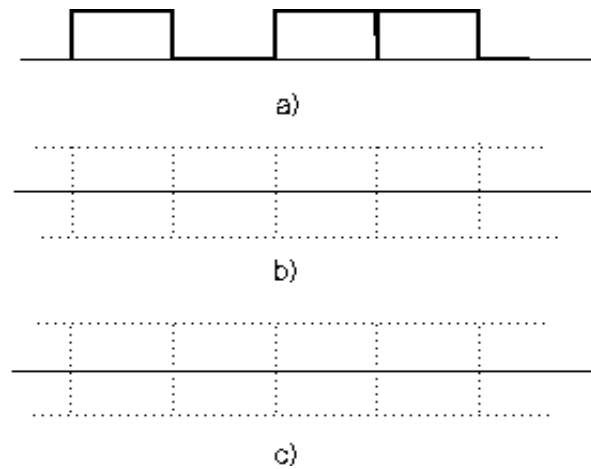
Pentru precizarea aspectelor prezentate, în acest capitol se va considera că semnalul numeric este exprimat prin cuvinte de cod binare, în care simbolurile "0" și "1" apar cu egală probabilitate. Acest semnal poate fi scris

$$g(t) = \sum_n a_n p(t - nT_s) \quad (9.25)$$

*Transmisiuni Analogice și Digitale: Semnale cu Modulație Exponențială și  
Tehnica producerii semnalelor cu modulație exponențială*

unde:

- $\{a_n\} = (...a_{-1}, a_0, a_1, ...)$  reprezintă secvența binară de date;
- $T_s$ - perioada de semnalare;
- $p(t)$  - un impuls dreptunghiular de amplitudine unu și durată  $T_s$ .



**Figura 9.3**

În condițiile precizate semnalele FSK au expresia

$$s(t) = U_o \cos[\omega_1 t + \Delta\omega \sum_{n=-\infty}^{\infty} ( \int_{(n-1)T_s}^{nT_s} a_n p(\tau) d\tau + \theta_n )] \quad (9.26)$$

în care:

- $\omega_1 = 2\pi f_1$  este frecvența unghiulară corespunzătoare simbolului "0";
- $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$  - diferența între cele două frecvențe unghiulare folosite pentru semnalare.

Dacă defazajele  $\theta_n$  sunt alese în așa fel încât să se asigure continuitatea fazei la trecerea de la un simbol la altul atunci relația (9.26) reprezintă clasa semnalelor FSK cu fază continuă (*Continuous Phase Frequency Shifting-CPFSK*). A fost pus în evidență [19],[24] faptul că această clasă de semnale prezintă o serie de avantaje cum ar fi: banda ocupată mai redusă, o comportare bună în procesul de demodulare, care fac ca ele să fie utilizate în foarte multe aplicații. La rândul lor semnalele CPFSK se

pot împărți în mai multe tipuri dintre care de o atenție deosebită s-au bucurat semnalele care folosesc deviația minim posibilă de frecvență între cele două frecvențe de semnalare și care sunt cunoscute sub denumirea de semnale MSK (*Minimum Shift Keying*)[21].

Analiza semnalelor CPFSK în domeniul frecvență s-a dovedit mai dificilă decât analiza corespunzătoare realizată pentru semnale MF deoarece nu a putut fi identificat un semnal elementar de la care prin generalizare să se tragă concluzii pentru un semnal oarecare. În consecință analiza trebuie realizată pentru semnalul numeric precizat la începutul paragrafului. În aceste condiții semnalul modulator este aleator și se urmărește determinarea funcției densitate spectrală de putere.

Observând expresia analitică a semnalelor FSK se constată că este derivabilă deci la frecvențe depărtate densitatea spectrală de putere va scădea cel puțin cu puterea a patra a frecvenței. Semnalul modulator fiind o succesiune de impulsuri dreptunghiulare frecvența instantanee nu este derivabilă, deci se poate concluziona că scăderea are loc chiar cu  $\omega^{-4}$ [19].

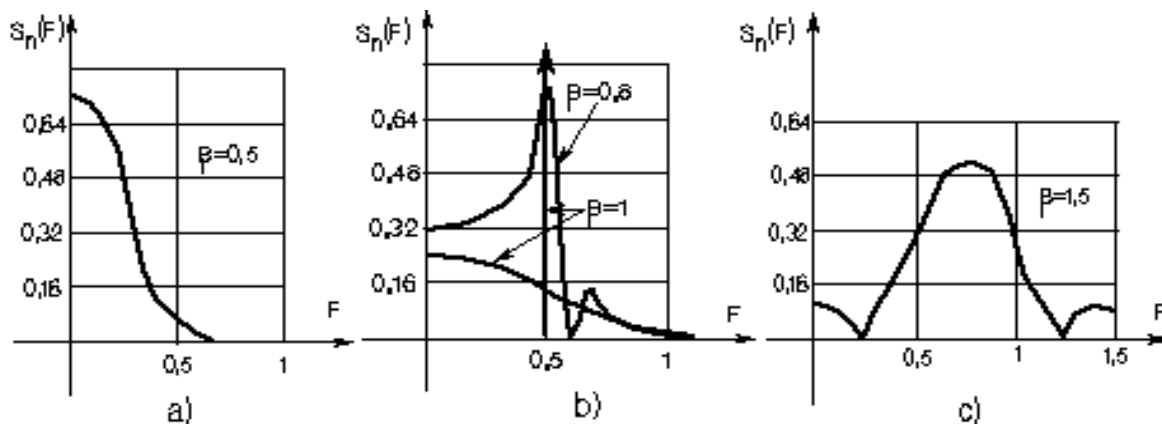
Pe baza funcției derivate spectrale dedusă prin calcule relativ complexe [20], se obțin reprezentările grafice date în figura 9.4 care corespund densităților spectrale pentru câțiva indici de modulație definiți prin

$$\beta = \Delta f \cdot T_s \quad (9.27)$$

funcție de frecvența normalată

$$F = (f - \frac{f_1 + f_2}{2}) \cdot T_s \quad (9.28)$$





**Figura 9.4**

Au fost alese pentru indicele de modulație valori care permit următoarele observații:

- pentru valori mici ale indicelui de modulație energia semnalului este concentrată în jurul frecvenței medii și densitatea spectrală scade monoton conform observației de mai sus;
- atunci când indicele de modulație se apropie de unitate (mai general, este un număr întreg) apar maxime din ce în ce mai pronunțate în jurul frecvențelor  $F=\pm 0.5$  ( $F=\pm 0.5.n$ ), maxime care la limită tind să devină funcții Dirac; aceasta implică existența unor componente sinusoidale importante;
- la indici de modulație mai mari energia se concentrează în jurul celor două frecvențe de semnalare.

#### **9.4 Semnale cu modulație în fază folosite pentru transmiterea informației numerice**

Făcând o paralelă cu semnalele FSK, în cazul de față, semnalul purtător are frecvența constantă, iar la trecerea într-o altă perioadă de semnalare se modifică, dacă este cazul, valoarea fazei trecând la o altă valoare dintr-un set de  $2^m$  valori (figura 9.3-c). Si în acest caz se folosește foarte mult varianta binară; totuși soluțiile cu 4 sau chiar mai multe faze au, la rândul lor multe aplicații. Semnalele corespunzătoare sunt cunoscute sub denumirea de semnale *cu deplasare în fază* (MPD), semnale *cu fază Comutată* (CMP) sau, în literatura de limbă engleză, semnale *Phase Shift-Keying* (PSK).

Luând în considerație semnalul modulator dat prin expresia (9.25), semnalele PSK pot fi descrise prin

$$s(t) = U_o \cos[\omega_o t + \sum_n \phi_n p(t - nT_s)] \quad (9.29)$$

unde  $\{\phi_n\}$  reprezintă o secvență de faze cu valori discrete în intervalul  $[0, 2\pi]$ , iar  $p(t)$  un impuls dreptunghiular de amplitudine și durată  $T_s$ .

Dezvoltând cosinusul relația (9.29) devine

$$\begin{aligned} s(t) = & U_o \cos \omega_o t \sum_n [p(t - nT_s) \cos \phi_n] - \\ & - U_o \sin \omega_o t \sum_n [p(t - nT_s) \sin \phi_n] \end{aligned} \quad (9.30)$$

Notând

$$\begin{aligned} \cos \phi_n & \rightarrow a_n \\ - \sin \phi_n & \rightarrow b_n \end{aligned} \quad (9.31)$$

semnalele PSK pot fi scrise

$$s(t) = U_o \cos \omega_o t \sum_n a_n p(t - nT_s) + U_o \sin \omega_o t \sum_n b_n p(t - nT_s) \quad (9.32)$$

Expresia (9.32) pune în evidență posibilitatea de a interpreta semnalul cu modulație de fază ca un semnal cu modulație liniară de tip MA-PS în cuadratură. În cazul particular când  $\phi_n \in 180^\circ$  rămâne numai componenta în fază. Această observație simplifică mult analiza semnalelor PSK în domeniul frecvență conducând la concluzia că banda ocupată de ele este comparabilă cu cea a semnalelor OOK. La rândul lor semnalele OOK sunt de fapt semnale MA-PS pentru care semnalul modulator este dat de expresia (9.25), deci densitatea spectrală de putere se obține prin translația, în jurul frecvenței  $\omega_o$ , a funcției corespunzătoare a semnalului din banda de bază. De aici rezultă ca semnalele PSK ocupă o bandă de frecvență mult mai îngustă decât semnale FSK.

Pe de altă parte se poate arăta [17,18,24] că, din punctul de vedere al detecției coerente a semnalului transmis în prezența zgomotului alb, gaussian, semnalele PSK binare sunt optime.

Aspectele menționate explică varietatea mare de modemuri PSK folosite pentru transmisiuni numerice sau de date.

## **9.5 Ecuația Integro-Diferențială (EID) a semnalelor MF**

Abordarea semnalelor MF ca fiind soluții ale unei ecuații diferențiale prezintă interes din punctul de vedere al procedeelor folosite pentru *producerea* acestor semnale.

*Transmisiuni Analogice și Digitale: Semnale cu Modulație Exponențială și  
Tehnica producerii semnalelor cu modulație exponențială*

S-a constatat că ecuația diferențială căutată este de ordinul doi; această ecuație trebuie să fie satisfăcută de

$$u_1(t) = \cos\left[\int_0^t \omega_i(\theta) d\theta\right], \quad u_2 = \sin\left[\int_0^t \omega_i(\theta) d\theta\right]$$

în care  $\omega_i(t)$  este frecvența instantanee,

$$\omega_i(t) = \omega_o + \omega_v(t) \quad (9.33)$$

Sub formă integro-diferențială ecuația este

$$\int_0^t \omega_i(\theta) u(\theta) d\theta + \dot{u}(t) / \omega_i(t) = 0 \quad (9.34)$$

sau, sub formă diferențială

$$u(t) - \frac{\dot{u}(t) \dot{\omega}_i(t)}{\omega_i^3(t)} + \frac{\ddot{u}(t)}{\omega_i^2(t)} = 0 \quad (9.35)$$

$$u(t) = A_1 u_1(t) + A_2 u_2(t) = C \cos\left[\int_0^t \omega_i(\theta) d\theta + \varphi\right] \quad (9.36)$$

Soluția generală a ecuației (9.36) este

unde  $A_1, A_2, C, \varphi$  sunt constante care se determină din condițiile inițiale.

Presupunând cunoscute aceste condiții la  $t=0$  soluția (9.37) se scrie

Dacă:  $u(0)=U_o, \dot{u}(0)=0$  rezultă:

In cazul semnalelor modulate pentru care frecvența instantanee este

$$u(t) = U_o \cos\left[\int_0^t \omega_i(\theta) d\theta\right] \quad (9.39)$$

$$u(t) = U_o \cos[\omega_o t + \Delta\omega \int_0^t f(\theta) d\theta]$$

## 9.6 Aproximarea EID în regim cvasistaționar

Forma generală a EID este mai puțin folosită. Dacă termenul de ordinul unu este neglijabil ecuația diferențială (9.36) poate fi pusă sub una din formele cunoscute sub denumirea de aproximări de regim cvasistaționar.

$$u(t) + \frac{\ddot{u}(t)}{\omega_i^2(t)} = 0 \quad (9.41)$$

$$u(t) - 2 \frac{\dot{u}(t)\dot{\omega}(t)}{\omega_i^3(t)} + \frac{\ddot{u}(t)}{\omega_i^2(t)} = 0 \quad (9.42)$$

Determinarea condițiilor de valabilitate a aproximărilor date se face pentru semnal modulator sinusoidal. Dacă

$$u(t) = U_o \cos(\omega_o t + \frac{\Delta\omega}{\omega_m} \sin \omega_m t) \quad (9.43)$$

$$\frac{\dot{u}(t)\dot{\omega}_i(t)}{\omega_i^3(t)} = \frac{U_o \Delta\omega \omega_m \sin \omega_m t}{(\omega_o + \Delta\omega \cos \omega_m t)^2} \sin(\omega_o t + \frac{\Delta\omega}{\omega_m} \sin \omega_m t) \quad (9.44)$$

termenul care trebuie să fie neglijabil este

Evident că primul și ultimul termen din ecuația diferențială (9.36) trebuie să fie de același ordin de mărime, motiv pentru care condiția de aproximație poate fi scrisă

*Transmisiuni Analogice și Digitale: Semnale cu Modulație Exponențială și  
Tehnica producerii semnalelor cu modulație exponențială*

$$\left| \frac{\dot{u} \dot{\omega}_i}{\omega_i^3} \right|_{\max} \frac{I}{|u|_{\max}} < \frac{\Delta \omega \omega_m}{(\omega_o - \Delta \omega)^2} \ll 1 \quad (9.45)$$

Așadar, EID poate fi scrisă sub una din formele (9.42), (9.43) dacă este îndeplinită condiția de regim cvasistaționar (9.46) care în cazul analizat poate fi simplificată la

$$\Delta \omega \ll \omega_o \quad \text{și} \quad \omega_m \ll \omega_o \quad (9.46)$$

## **TEHNICA PRODUCERII SEMNALELOR CU MF**

### **1 Introducere**

În acest capitol vor fi prezentate:

a) procedee "directe" de producere a semnalelor MF cum sunt:

- procedeele care au la bază simularea EID;
- procedeele care folosesc controlul unor generatoare de semnale triunghiulare sau dreptunghiulare;

b) procedee "indirecte" de producere a semnalelor MF cum sunt:

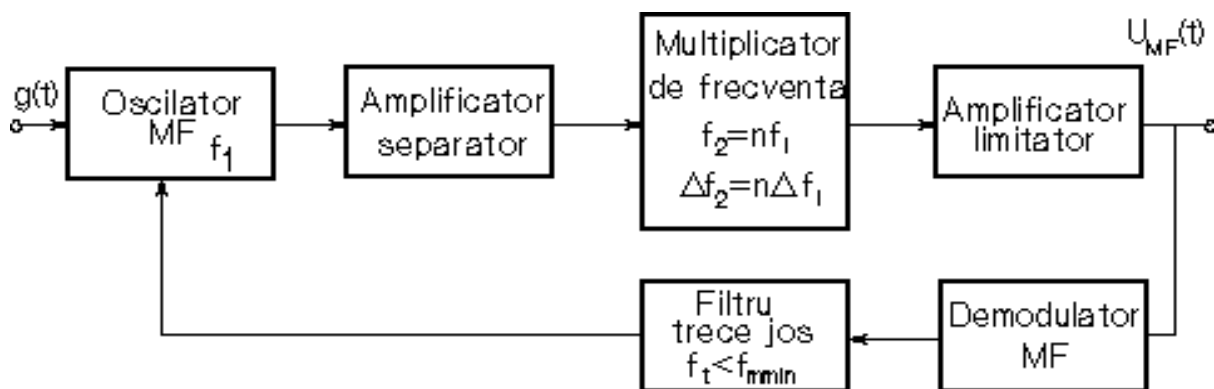
- procedeul Armstrong;
- procedeul care folosește modulația în fază.

O schemă bloc care ilustrează principiul procedeelor "directe" de producere a semnalelor MF este dată în figura 10.1. Se constată că semnalul modulator acționează "direct" asupra blocului care produce oscilația purtătoare. Se remarcă, apoi, existența unui amplificator limitator care are rolul de a elimina o, eventuală, modulație parazită de amplitudine.

Multiplicatorul de frecvență are rolul de a multiplica derivația de frecvență; el multiplică, totodată și frecvența purtătoare. Acest bloc este necesar deoarece, rareori,

derivația realizată de modulator are valoarea dorită.

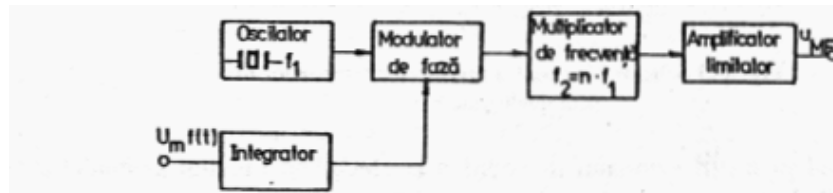
Este evident că procedeul prezintă dezavantajul unei stabilități reduse a frecvenței centrale având în vedere că unul dintre parametrii care determină această valoare trebuie să poată fi controlat de semnalul modulator, deci poate fi influențat și de unele variații nedorite. Pentru a ameliora performanțele procedeului, din acest punct de vedere, se introduce un sistem de *control automat al frecvenței* (CAF). Pentru a realiza acest sistem, cu ajutorul unui demodulator MF se extrage un semnal dependent de valoarea frecvenței instantanee (figura 10.1). Acest semnal conține atât informația cu privire la mesajul transmis cât și o informație referitoare la instabilitatea frecvenței centrale. Cum acest termen este lent variabil în timp, el poate fi separat de termenul corespunzător modulației cu ajutorul unui filtru trece jos și este folosit, într-o buclă de reacție, pentru a comanda în mod corespunzător oscilatorul modulat.



**Figura 10.1**

Procedeele "indirecte" de producere a semnalelor MF, al căror principiu este ilustrat de schema bloc dată în figura 10.2, evită acest dezavantaj.





**Figura 10.2**

Schema dată corespunde procedului de producere a semnalelor MF prin intermediul modulației de fază, procedeu care va fi analizat în paragraful 10.6.2. Semnalul generat este un semnal MP, dar semnalul aplicat modulatorului de fază (MP) fiind

$$u_1(t) = U_m \int f(\theta) d\theta \quad (10.1)$$

la ieșirea limitatorului rezultă

$$U_{mf}(t) = U(t) \cos[\omega_0 t + k_{MP} U_m \int f(\theta) d\theta] \quad (10.2)$$

unde  $U(t)$  este amplitudinea semnalului MF care pune în evidență existența modulației amplitudine parazită. Semnalul generat este, deci, modulat în frecvență, modulația realizându-se fără a afecta stabilitatea oscilatorului. Se va arăta, însă (paragraful 10.6.2), că deviația de frecvență rezultată este foarte mică fiind necesare etaje suplimentare pentru a se ajunge la valorile curent folosite.

## **10.2 Generarea semnalelor MF prin simularea EID**

Generarea semnalului modulat în frecvență exprimat prin, (9.35) poate fi făcută folosind principiile modelării cunoscute din tehnica realizării calculatoarelor analogice. Schema bloc dată în figura 10.3, reprezintă o soluție posibilă. Trebuie

precizat că semnalul  $v(t)$  reprezintă suma dintre o componentă continuă și semnalul modulator ponderat.

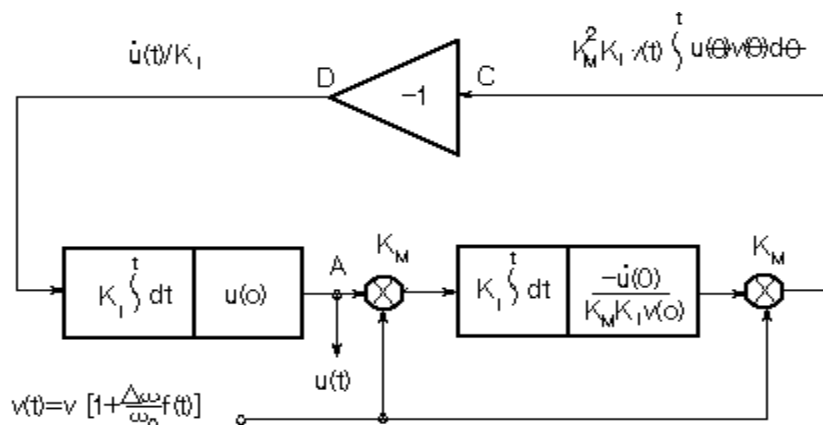


Figura 10.3

Notând prin  $u(t)$  semnalul în nodul  $A$  și efectuând bilanțul semnalelor la porțile  $D$  și  $C$  ale inversorului din schemă rezultă

$$K_M^2 K_I v(t) \int v(\theta) u(\theta) d(\theta) = -\frac{\dot{u}(t)}{K_I} \quad (10.3)$$

deviația de frecvență fiind  $\Delta\omega$ .

Practic, utilizând circuite integrate MSI s-au realizat generatoare MF pe acest principiu care pot lucra până la frecvența purtătoare  $f_o=10\text{MHz}$ . Condițiile inițiale pot fi eliminate și înlocuite prin circuite de comparație și reacție care asigură amplitudinea  $U_o$  dorită pentru semnalul generat.

### **10.3 Generarea semnalelor MF prin modelarea EID în regim cvasistaționar**

În acest subcapitol vor fi abordate două tipuri de oscilatoare MF care se bazează pe modelarea EID:

- oscilatoarele MF cu generator de curent comandat;
- oscilatoarele MF cu diodă varicap.

#### **10.3.1 Schema echivalentă a oscilatoarelor MF cu generator de curent comandat**

Schema echivalentă a oscilatoarelor MF care au la bază modelarea EID în regim cvasistaționar este dată în figura 10.4. Generatorul de curent  $i_x(t)$  corespunde dispozitivului activ din schema reală a oscilatorului și are rolul de a compensa pierderile circuitului rezonant; deci, considerând că se îndeplinesc condițiile de amorsare a oscilațiilor, se poate scrie

$$i_x(t) = i_{Ro}(t) = \frac{u(t)}{R_o}. \quad (10.4)$$

Scriind ecuația conservării curenților în nodul 1 și ținând cont de (10.4) rezultă:

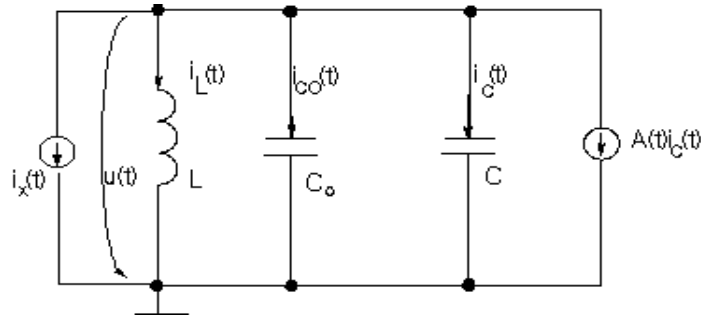
$$i_c + i_L + i_{co} + A(t)i_c = 0 \quad (10.5)$$

unde

$$i_L = \frac{1}{L} \int u(\tau) d\tau, \quad i_c = C \frac{du}{dt}, \quad i_{co} = C_o \frac{du}{dt} \quad (10.6)$$

unde  $A(t)$  reprezintă o funcție dependentă de semnalul modulator care va fi precizată

în continuare.



**Figura 10.4**

Din (10.5) se deduce

$$\int u(\theta) d\theta + \frac{\bar{u}(t)}{\omega_i^2(t)} = 0 \quad (10.7)$$

în care

$$\omega_i^2(t) = \frac{I}{L[C_o + C(I + A(t))]} \quad (10.8)$$

Ecuția (10.7) este echivalentă ecuației diferențiale (9.43), după cum se poate verifica prin derivare.

Considerând

$$A(t) = A_o + A_I f(t) \quad (10.9)$$

în care  $f(t)$  reprezintă semnalul modulator normat, se poate efectua dezvoltarea în serie

$$\omega_i(t) = \omega_o \left[ 1 - \frac{\Delta\omega}{\omega_o} f(t) + \dots \right], \quad \frac{\Delta\omega}{\omega_o} \gg 1 \quad (10.10)$$

unde

$$\omega_o = \omega_i|_{f(t)=0} = \frac{I}{\sqrt{L[C_o + C(I + A_o)]}} \quad (10.11)$$

iar

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_o} = -\frac{\partial}{\partial f} \left( \frac{I}{2} \ln \omega_i^2 \right) |_{f(t)=0} = \frac{C A_I}{2[C_o + C(I + A_o)]} \quad (10.12)$$

Condiția de convergență rapidă a seriei (10.10) se transpune parametrilor schemei prin relația (10.12).

### 10.3.2 Oscilator MF care are la bază schema echivalentă analizată

Schema oscilatorului modulat în frecvență este dată în figura 10.5. Se observă că este un oscilator  $LC$  cu cuplaj magnetic realizat cu tranzistorul  $T_3$  din perechea diferențială  $T_3T_4$ . Deoarece circuitul modelează ecuația diferențială aproximativă (în regim cvasistaționar) a oscilațiilor MF, cu ajutorul unui circuit rezonant derivație este de așteptat să apară și o modulație de amplitudine nedorită [10]. În scopul eliminării sale, semnalul este extras din colectorul tranzistorului  $T_4$ , perechea diferențială fiind adusă în regim de limitare (semnalul de intrare mai mare decât  $4V_{T\approx 100\text{mV}}$ ). Totodată, circuitul de sarcină al tranzistorului  $T_4$  fiind un circuit rezonant  $RLC$  acordat pe frecvența  $f_o$ , semnalul obținut are un conținut redus de armonici.

Perechea diferențială  $T_1T_2$  are rolul de a crea generatorul de curent  $A(t)i_c$ . Rezistența  $r$ , care permite preluarea unei tensiuni proporționale cu  $i_c$ , se alege de valoare mică astfel încât factorul de calitate al circuitului acordat să fie micșorat acceptabil de grupul  $C-r$ . Se pot scrie relațiile:

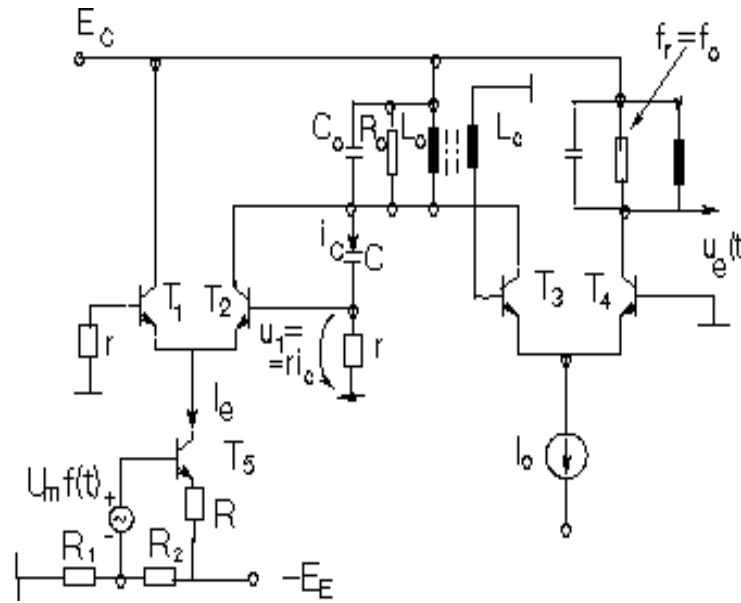
$$I_E = I_{E0} + I_{El} f(t)$$

$$I_{E0} = \frac{I}{R} \left( \frac{E_e R_2}{R_1 + R_2} - U_{BE} \right), I_{El} \approx \frac{U_m}{R} \quad (10.13)$$

Conform analizei funcționării montajului diferențial cu generator de curent (Anexa 2) componenta de radio-frecvență (la semnal mic) a curentului de colector pentru tranzistorul  $T_2$  este

$$i_{C2}(t) = A(t) i_c(t) = g_{md} u_1 ; g_{md} \approx \frac{I_E}{4V_T} \quad (10.14)$$

unde  $u_1 = r i_c$ .



**Figura 10.5**

Din relațiile (10.13) și (10.14) se obține:

$$A(t) = \alpha \frac{I_{E0} r}{4V_T} + \alpha \frac{I_{El} r}{4V_T} f(t) \quad (10.15)$$

respectiv:

$$a(t) = \omega_l \left[ 1 - \frac{\Delta\omega}{\omega_b} f(t) + \dots \right], \frac{\Delta\omega}{\omega_b} \gg 1 \quad (10.16)$$

### 10.3.3 Oscilatoare MF cu diodă varicap

Schema echivalentă a unui oscilator cu diodă varicap este dată în figura 10.6. Se va arăta că și acest circuit realizează simularea EID în regim cvasistaționar (9.43).

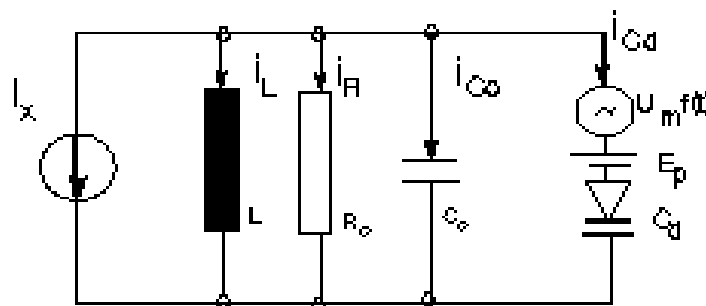
Dioda varicap este polarizată de tensiunea continuă  $U_p$  peste care se suprapune semnalul modulator  $U_m f(t)$ . Dacă se impune  $U_m \ll U_p$ , capacitatea diodei,  $C_d(t)$ , este dată de expresia:

$$C_d = \frac{C_{d0}}{\left[1 + \frac{U_m f(t)}{U_p + V_0}\right]^\gamma} \quad (10.17)$$

unde  $C_{d0}$  este capacitatea diodei pentru  $U_m=0$ ,  $\gamma$  un exponent care poate fi determinat cu datele din catalog și care depinde de tehnologia de realizare a diodei. Celelalte mărimi sunt conforme cu schema dată în figura 10.6.

De remarcat că pe diodă se aplică și tensiunea generată la bornele circuitului rezonant. Pentru o funcționare corectă este necesar și :

$$u(t) \ll E_p$$



**Figura 10.6**

Dacă aceste condiții sunt îndeplinite, iar circuitul este adus în regim de oscilație prin compensarea pierderilor de către dispozitivul activ ( $i_x = -i_{R0}$ ), ecuația de

conservare a curenților în nodul  $I$  este

$$i_L + i_{C0} + i_{Cd} = 0 \quad (10.18)$$

adică

$$\frac{1}{L} \int u(\tau) d\tau + [C_0 + C_d(t)] \dot{u} = 0 \quad (10.19)$$

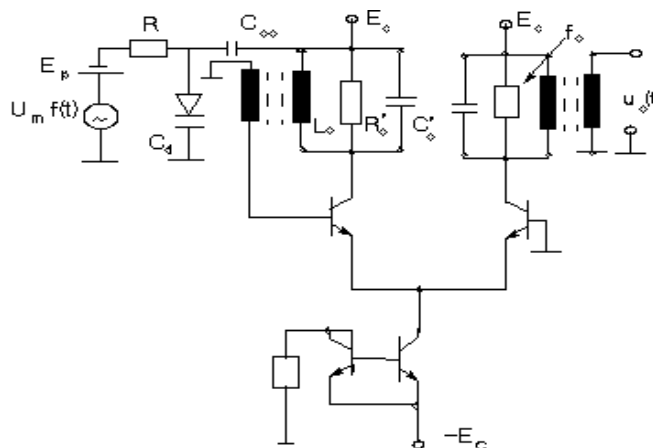
Notând:

$$\omega_i(t) = \frac{1}{\sqrt{L[C_0 + C_d(t)]}} \quad (10.20)$$

și derivând, se obține

$$u - \frac{2\dot{u}\dot{\omega}_i}{\omega_i^3} + \frac{\ddot{u}}{\omega_i^2} = 0 \quad (10.21)$$

Parametrii semnalului modulat și condițiile de lucru cu distorsiuni limitate se deduc procedând la fel ca în paragraful 10.3.1. În cursul calculelor, pentru capacitatea diodei varicap se va folosi expresia exactă (10.17).



**Figura 10.7**

Rezultă:



$$\omega_0 = \frac{I}{\sqrt{L[C_0 + C_{d0}]}} \quad (10.22)$$

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_o} = \frac{U_m}{U_p + V_o} \frac{\gamma C_{do}}{2(C_o + C_{do})}$$

Schema unui oscilator MF care corespunde schemei echivalente analizate este dată în figura 10.7.

#### **10.4 Metoda generatorului de undă triunghiulară de producere a semnalelor MF**

Se consideră expresia tensiunii modulate în frecvență

$$u(t) = U_o \cos \left[ \int_0^t \omega_i(\theta) d\theta \right] \quad (10.23)$$

pentru care frecvența instantanee este

$$\omega_i(t) = \omega_o + \Delta\omega f(t) > 0 \quad (10.24)$$

Introducând notația

$$\tau(t) = t + \frac{\Delta\omega}{\omega_o} \int_0^t f(\theta) d\theta \quad (10.25)$$

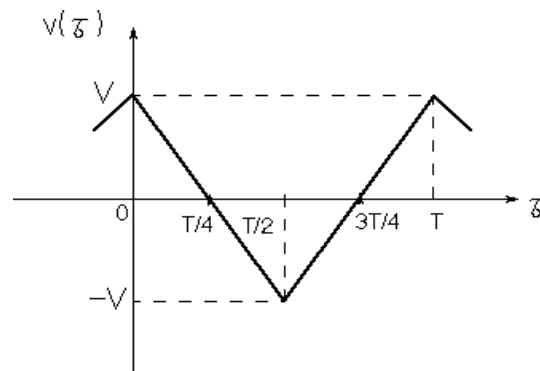
funcția  $\tau(t)$  este crescătoare de argument  $t$ .

Tensiunea MF poate fi scrisă

$$u = U_o \cos[\omega_o \tau(t)] \quad (10.26)$$

și se constată a fi periodică în raport cu argumentul  $\tau$  (cu perioada  $T=2\pi/\omega_o$ ).

Se consideră realizabilă o tensiune triunghiulară  $v(\tau)$  periodică în raport cu  $\tau$ , având amplitudinea  $V$ , ca în figura 10.8.



**Figura 10.8**

Introducând această tensiune printr-un circuit neliniar caracterizat de relația intrare-ieșire

$$u = U_o \sin\left(\frac{\pi v}{2V}\right) \quad (10.27)$$

se obține la ieșire chiar semnalul (10.27) care reprezintă tensiunea modulată în frecvență.

Realizarea tensiunii triunghiulare  $v(\tau)$  se poate face cu ajutorul schemei bloc care este reprezentată în figura 10.9.

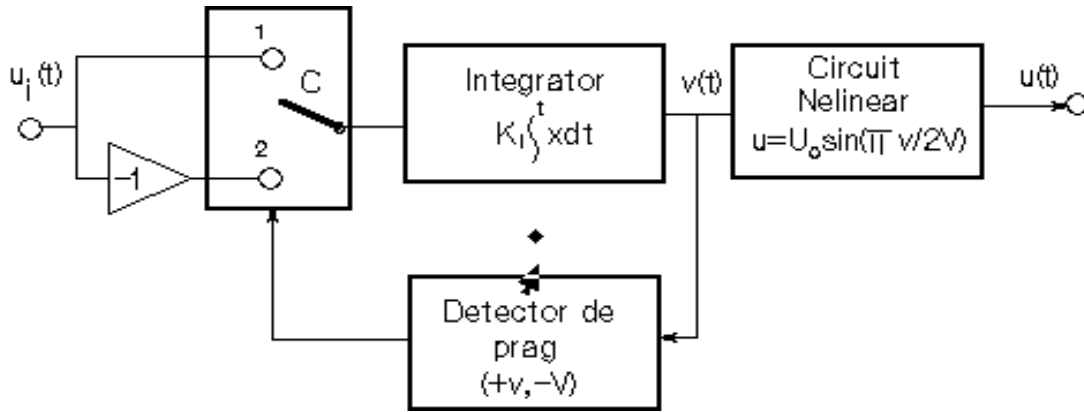
Funcționarea este următoarea: La momentul  $t_i$  detectorul de prag sesizează tensiunea la ieșire  $v$  egală cu  $+V$  și comandă trecerea comutatorului  $K$  pe poziția 2.

Pentru  $t \geq t_i$  tensiunea la ieșirea integratorului va fi

$$v = V - K_I \int_{t_i}^t u_i(\theta) d\theta = V - K_I U_i[\tau(t) - \tau(t_i)] \quad (10.28)$$

și are legea de variație liniar scăzătoare în  $\tau$ , dacă

$$U_i(t) = U_i + U_{mf}(t) > 0 \quad (10.29)$$



**Figura 10.9**

La momentul  $t_{i+1}$  tensiunea  $v$  atinge nivelul  $-V$  și la comanda detectorului de prag, comutatorul  $K$  trece în poziția 1. Expresia tensiunii  $v$  pentru  $t \geq t_{i+1}$  devine

$$v = -V + K_I \int_{t_{i+1}}^t u_i(\theta) d\theta = -V + K_I U_i [\tau(t) - \tau(t_{i+1})] \quad (10.30)$$

În această situație tensiunea este liniar crescătoare în  $\tau$ .

Următoarea comutare are loc la momentul  $t_{i+2}$  pentru care tensiunea  $v$  atinge nivelul  $+V$ .

Se constată că semnalul  $v$  este periodic în  $\tau$ , de perioada  $T$  determinată de

$$K_I U_i \frac{T}{2} = 2V \quad (10.31)$$

Frecvența purtătoare a semnalului MF, la ieșirea circuitului nelinear caracterizat de legea (10.28) este

$$\omega_o = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi K_I U_i}{2V} \quad (10.32)$$

Circuitul nelinear realizat cu 6 diode cu siliciu și rezistențe cu toleranțe 1%, conduce pentru semnalul la ieșire, în lipsa modulației, la distorsiuni armonice sub

nivelul de 50 dB.

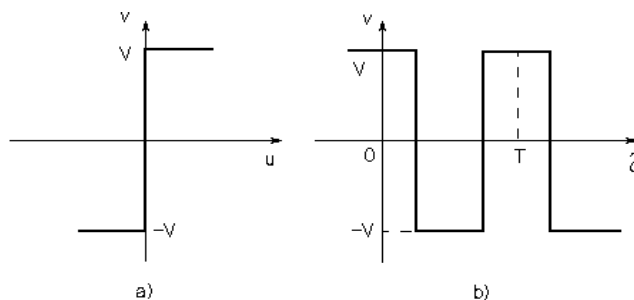
Un comentariu din care să reiasă că semnalul poate fi modulat în frecvență, având în vedere că frecvența ei poate fi negativă este că  $U_m < U_o$  și  $U_i(t) = U_o + U_{mf}(t)$ .

### 10.5 Metoda generatorului de undă dreptunghiulară de producere a semnalelor MF

Se consideră că semnalul modulat în frecvență

$$u(t) = U_o \cos[\omega_o \tau(t)], \quad \tau(t) = t + \frac{\Delta\omega}{\omega_o} \int f(\theta) d\theta \quad (10.33)$$

este trecut printr-un limitator ideal cu caracteristica de transfer reprezentată în figura 10.10-a.



**Figura 10.10**

Semnalul de la ieșirea limitatorului (figura 10.10-b) poate fi dezvoltat în serie Fourier

$$v(\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1} \cos[(2k-1)\omega_o \tau] \quad (10.34)$$

*Transmisiuni Analogice și Digitale: Semnale cu Modulație Exponențială și  
Tehnica producerii semnalelor cu modulație exponențială*

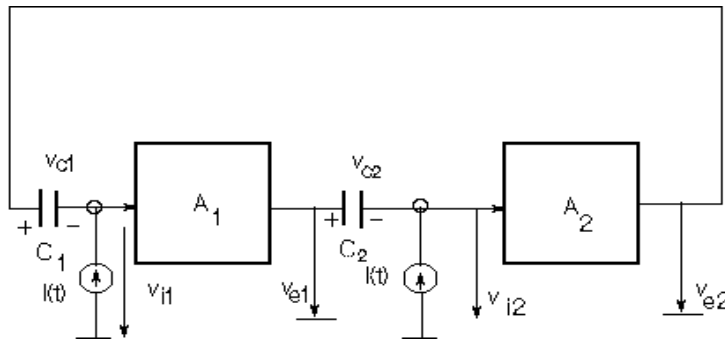
Fiecare componentă din expresia de mai sus reprezintă un semnal modulat în frecvență

$$\begin{aligned} a_{2k-1} \cos(2k-1)\omega_o \tau = \\ = a_{2k-1} \cos[(2k-1)\omega_o t + (2k-1)\Delta\omega \int_0^t f(\theta) d(\theta)] \end{aligned} \quad (10.35)$$

În condițiile în care spectrele componentelor adiacente nu se întrepătrund, cu ajutorul unui circuit selectiv poate fi extras din semnalul  $v[\tau(t)]$  un semnal modulat în frecvență cu frecvența purtătoare  $(2k-1)\omega_o$  și deviația de frecvență  $(2k-1)\Delta\omega$ .

Cu aceste considerente rezultă metoda de generare a semnalelor cu modulație în frecvență: se realizează mai întâi forma de undă dreptunghiulară periodică în  $\tau$  iar apoi se extrage una din componentele dezvoltării (10.34).

În figura 10.11 este reprezentată o schemă, ( $C_1=C_2=C$ ), care permite realizarea tensiunii dreptunghiulare  $v(\tau)$ .

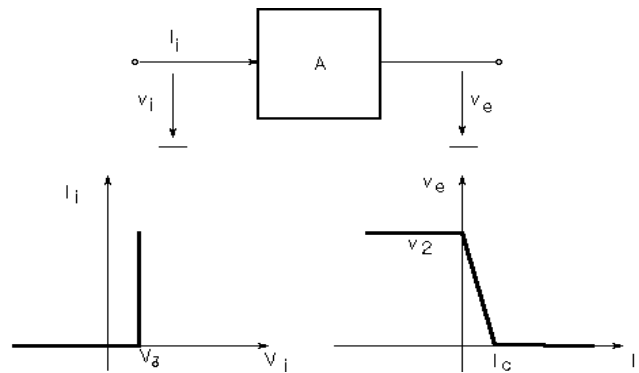


**Figura 10.11**

Blocurile  $A$  sunt caracterizate prin caracteristicile de intrare și transfer reprezentate în figura 10.12.

Curentul  $I(t)$  se alege de forma

$$I(t) = I_o \left[ 1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_o} f(t) \right] \quad (10.36)$$



**Figura 10.12**

Pentru analiza funcționării se admite, mai întâi, că  $f(t)=0$ , adică  $I(t)=I_o$ . Principalele forme de undă din schemă sunt reprezentate în figura 10.12.

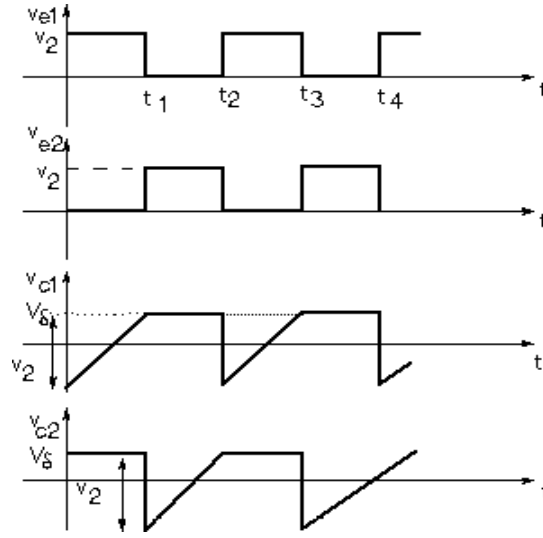
Corectitudinea formelor de undă se stabilește considerând, mai întâi, corecte reprezentările pentru  $t \in (0, t_1)$ . În acest domeniu:

- corespondențele  $v_{i1}-v_{i2}$  sunt în conformitate cu caracteristicile din figura 10.12;
- tensiunea  $v_{i1}$  este liniar crescătoare cu panta  $I_o/C$  datorită încărcării sub curentul  $I(t)=I_o$  a condensatorului  $C_1$  care are o bornă la masă prin  $v_{e2}=0$ . În același timp etajul  $A_1$  nu absoarbe curent deoarece s-a presupus  $v_{i1} < V_d$ .

La momentul  $t=t_1$  are loc ieșirea din blocare a etajului  $A_1$  deoarece nivelul tensiunii de intrare atinge nivelul  $V_d$ . Simultan are loc ieșirea din saturare a etajului  $A_2$  deoarece scăderea tensiunii  $v_{e2}$  atrage după sine și scăderea tensiunii  $v_{i2}$ . Prin bucla de reacție pozitivă existentă, procesul este cumulativ conducând într-un timp foarte scurt la:

- intrarea în saturare a etajului  $A_1$  și deci obținerea unei tensiuni  $v_{e1}=0$ ;
- intrarea în blocare a etajului  $A_2$  deoarece micșorarea cu  $V_2$  a tensiunii  $v_{e1}$  este transmisă prin condensatorul  $C_2$  la intrarea etajului  $A_2$ .

Conform considerentelor prezentate, pentru  $t \in (0, t_1)$ , formele de undă reprezentate în figura 10.13 sunt corecte.



**Figura 10.13**

Fenomenul se repetă avînd ca efect apariția semnalelor periodice dreptunghiulare la ieșirea etajelor  $A_1$  și  $A_2$ .

În cazul în care curentul  $I(t)$  are expresia (10.37) iar etajul în blocare este  $A_1$ , pentru  $t \in (t_k, t_{k+1})$ , se poate scrie

$$v_i I(t) = V_\delta - V_2 + \frac{1}{C} \int_{t_k}^t I_o \left[ 1 + \frac{\Delta \omega}{\omega_o} f(\theta) \right] d\theta \quad (10.37)$$

La momentul  $t_{k+1}$ , rezultă

$$v_i I(t_{k+1}) = V_\delta \quad (10.38)$$

Cu notația (10.33) din relațiile (10.37) și (10.38) se obține

$$\frac{I_o}{C} [\tau(t_{k+1}) - \tau(t_k)] = V_2 \quad (10.39)$$

Rezultă, pentru perioada, purtătoarei expresia

$$T = 2[\tau(t_{k+1}) - \tau(t_k)] = 2V_2 \frac{C}{I_o} \quad (10.40)$$

sau

$$\omega_o = \frac{\pi I_o}{V_2 C} \quad (10.41)$$

care reprezintă frecvența fundamentală pentru  $v(\tau)$ .

## 10.6 Producerea semnalelor MF prin metode indirecte

### 10.6.1 Metoda Armstrong de producere a semnalelor MF

Fie semnalul modulat în frecvență

$$u(t) = U_o \cos[\omega_o t + \Delta\omega \int_0^t f(\theta) d\theta] \quad (10.42)$$

Se poate scrie

$$\begin{aligned} u(t) = & U_o \cos \omega_o t \cos[\Delta\omega \int_0^t f(\theta) d\theta] - \\ & - U_o \sin \omega_o t \sin[\Delta\omega \int_0^t f(\theta) d\theta] \end{aligned} \quad (10.43)$$

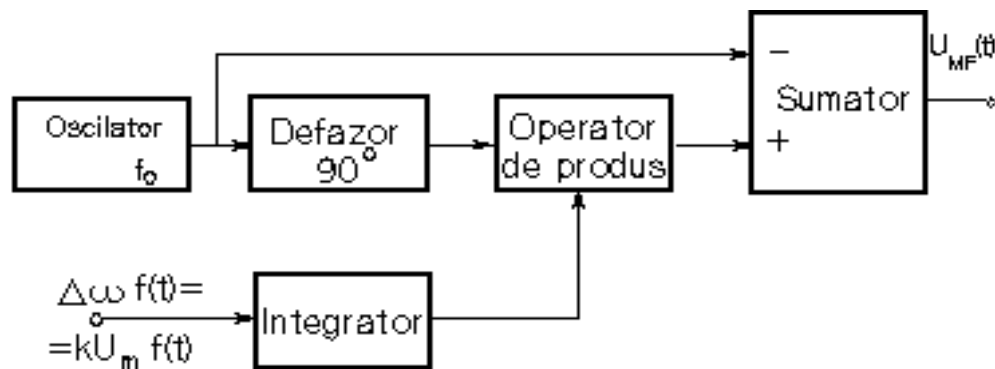
Dacă

$$|\Delta\omega \int_0^t f(\theta) d\theta| < 0,2 \text{ radiani} \quad (10.44)$$

atunci, cu o bună aproximare, rezultă

$$u(t) = U_o \cos \omega_o t - U_o [\Delta\omega \int_0^t f(\theta) d\theta] \sin \omega_o t \quad (10.45)$$





**Figura 10.14**

Relația (10.45) stă la baza metodei de generare propusă de Armstrong, conform schemei bloc din figura 10.14.

În cazul semnalului modulator sinusoidal, condiția (10.44) devine

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_m} < 0,2, \quad f(t) = \cos \omega_m t \quad (10.46)$$

Dacă  $\omega_m \in [\omega_{mm}, \omega_{mM}]$  condiția se îndeplinește mai greu pentru frecvența de modulație minimă  $\omega_{mm}$ .

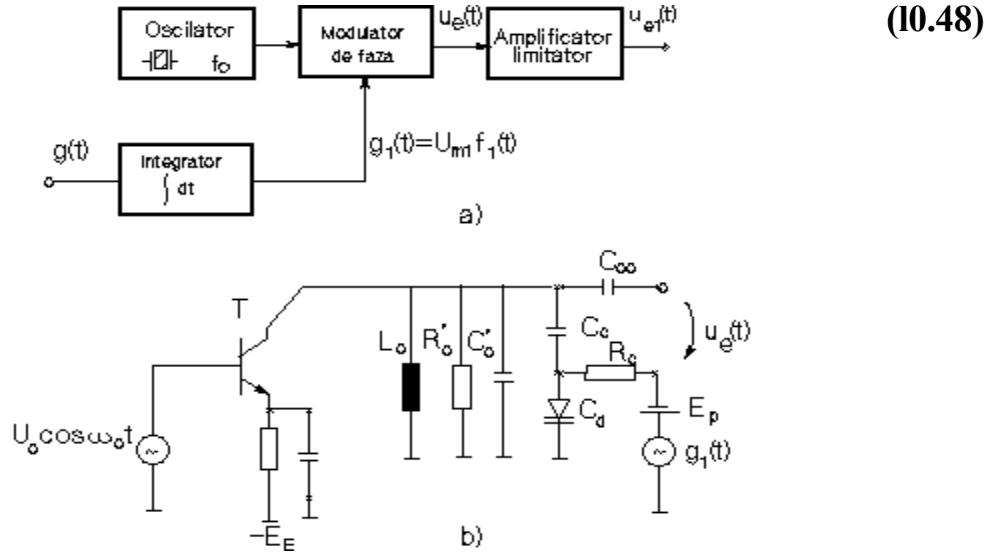
Deoarece este puțin probabil că în cadrul unui semnal complex toată energia să fie concentrată, într-un interval de timp, pe frecvența de modulație minimă, se acceptă condiția mai puțin restrictivă

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_{mm}} < 0,5. \quad (10.47)$$

### 10.6.2 Producerea semnalelor MF prin modulație de fază

Un semnal MP poate fi produs cu un circuit având schema bloc dată în figura 10.15-a. Modulatorul poate fi un etaj de amplificarea având ca sarcină un circuit rezonant derivație RLC; capacitatea de acord este realizată dintr-un condensator fix în paralel cu o diodă varicap (figura 10.15-b). Dioda varicap este polarizată cu tensiunea

continu  $E_p$  peste care se suprapune semnalul modulator  $U_m f(t)$ . Dacă  $(U_m \ll E_p, u(t) \ll E_p)$  capacitatea echivalentă diodei (10.17) poate fi aproximată prin



**Figura 10.15**

Așadar, capacitatea de acord a circuitului variază în ritmul semnalului modulator. În mod corespunzător se modifică și frecvența de rezonanță. Aceasta se traduce printr-o modulație de fază și de amplitudine a semnalului amplificat. Presupunând că acordul este realizat în absența semnalului modulator ( $U_m=0$ ), semnalul obținut la ieșirea amplificatorului poate fi scris

$$u(t) = U(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)] \quad (10.49)$$

unde  $U(t)$ , amplitudinea semnalului de ieșire, evidențiază modulația parazită de amplitudine, iar

$$\varphi(t) \approx K_p U_m f_1(t); \quad \Delta\varphi = K_l U_m \quad (10.50)$$

dacă  $\Delta \leq \pi/4$ .

Pentru a elimina modulația de amplitudine urmează un amplificator limitator, după care

$$u(t) = U_0 \cos[\omega_0 t + \Delta\varphi(t)] \quad (10.51)$$

în care  $U_0$  reprezintă amplitudinea semnalului limitat.

Schema bloc analizată poate fi utilizată pentru producerea de semnale MF dacă, în prealabil, semnalul modulator este trecut printr-un integrator (figura 10.15-a). În acest caz, semnalul aplicat la intrarea modulatorului devine

$$g_1(t) = U_m \int_0^t f(\tau) d\tau \quad (10.52)$$

iar semnalul de la ieșirea limitatorului

$$u_e(t) = U_0 \cos[\omega_0 t + \Delta\varphi \int_0^t f(\tau) d\tau] \quad (10.53)$$

Expresia (10.52) este similară cu (10.42), deci schema bloc permite generarea unor semnale MF cu frecvență stabilă. Principalul dezavantaj constă, ca și în cazul metodei Armstrong, în imposibilitatea de a realiza deviații mari de frecvență. Într-adevăr, se poate considera că faza variază proporțional cu semnalul modulator, adică se introduc distorsiuni mici, dacă

$$\Delta\varphi \leq \Delta\varphi_{\max} \quad (10.54)$$

Variația maximă a fazei este determinată de amplitudinea semnalului modulator,  $g_1(t)$ .

Dacă semnalul modulator  $g(t)$  are componente în domeniul  $\omega \in [\omega_{\min}, \omega_{\max}]$ , amplitudinea maximă a semnalului  $g_1(t)$  rezultă la  $\omega = \omega_{\min}$ . Într-adevăr presupunând cazul particular:

$$g(t) = U_m \cos \omega_m t \quad (10.55)2$$

se obține:

$$g_1(t) = \frac{U_m}{\omega_m} \sin \omega_m t; \quad U_m I = \frac{U_m}{\omega_m}. \quad (10.56)$$

În consecință deviația de frecvență realizabilă este limitată la

$$\Delta f \leq \Delta \varphi_{\max} f_{m \min} \quad (10.57)$$

De exemplu la  $\Delta \varphi = \pi/4$  rad și  $f_{mm} = 100$  Hz se obține  $\Delta f = 78,4$  Hz.

Deoarece sistemele de comunicație necesită deviații de frecvență mult mai mari în schema bloc apare multiplicatorul de frecvență a cărui funcționare este discutată în subcapitolul următor.

### 10.7 Multiplicarea deviației de frecvență a semnalelor MF

Intr-o serie de aplicații, și nu numai în cazul procedeelor indirecte de producere a semnalelor MF, este utilă multiplicarea deviației de frecvență a semnalului modulat în frecvență.

Introducând semnalul modulat în frecvență reprezentat sub forma (10.33) într-un circuit neliniar, se obține la ieșire un semnal periodic în raport cu variabila  $\tau$ , care dezvoltat în serie Fourier poate fi scris

$$v(\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k \cos k \omega_o \tau \quad (10.58)$$

O componentă a semnalului rezultat este, de fapt, un semnal modulat în frecvență

$$v_k(\tau) = d_k \cos k \omega_o \tau = d_k \cos[k \omega_o t + k \Delta \omega \int f(\theta) d\theta] \quad (10.59)$$

având frecvența purtătoare  $k f_o$  și deviația de frecvență  $k \Delta f$ .

Extragerea componentei dorite la care multiplicarea deviației de frecvență s-a efectuat de  $k$  ori se face cu un filtru trece-bandă care să aibă lărgimea de bandă corespunzătoare semnalului MF (9.19) și care atenuează suficient componentele

*Transmisiuni Analogice și Digitale: Semnale cu Modulație Exponențială și  
Tehnica producerii semnalelor cu modulație exponențială*

spectrale corespunzătoare semnalelor nedorite.

Deoarece amplitudinea componentelor din dezvoltarea (10.58) scade cel puțin cu ordinul  $k$  și deoarece odată cu creșterea valorii parametrului  $k$  filtrarea componentei dorite devine dificilă, în practică se utilizează multi-plicatoare cu doi (dubloare) sau cu trei (triploare).

O soluție de realizare a multiplicatorului corespunde folosirii unui etaj cu tranzistor bipolar în regim de semnal mare (vezi Anexa 1), având sarcină un circuit acordat derivație sau circuite cuplate. Multiplicarea de ordin mare se obține conectând în cascadă dubloare și triploare.