

SEMNALE CU MODULAȚIE NUMERICĂ

1. INTRODUCERE

- Semnalele de transmis suferă o prelucrare prealabilă;
- Purtătoarea - *semnalul de tact*, parametrul controlat - *codul transmis*.
- Etape:

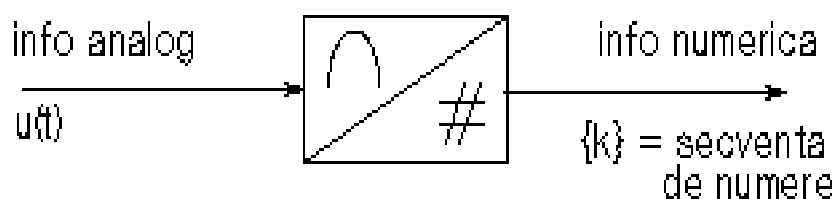


Figura 1

- a) eșantionare;
 - b) cuantizare + codare numerică.
- a) **eșantionarea** – are rolul de a transforma semnalul continuu în domeniul timp într-o secvență discontinuă; numai valorile semnalului la câteva momente discrete, nu neapărat uniform dispuse în timp, vor face obiectul modulației. La baza eșantionării se află teorema eșantinerii a lui Nyquist conform căreia nu se pierde informație în cursul acestui proces cu condiția ca semnalul să fie de bandă limitată:
- $$U(\omega) = \mathfrak{T}\{u(t)\} = 0 \quad \text{pentru } |\omega| > \omega_{\text{Max}} \quad (1)$$
- iar eșantioanele sunt extrase la intervale care respectă condiția:
- $$T_e \leq \pi / \omega_M.$$
- c) **Cuantizarea** reprezintă elementul original pentru transmiterea digitală a semnalelor analogice; această operație transformă valoarea eșantion

$$u(nT_e) \in R \quad (1)$$

în valori discrete b_k la care se asociază numere întregi k :

$$u(nT_e) \Rightarrow b_k \rightarrow k, k \in \overline{1, M}; b_k \in B_M \quad (2)$$

Restrângerea la un număr finit de valori face ca o serie de detalii să fie pierdute iremediabil; În consecință procesul introduce o eroare sistematică care se manifestă ca un zgomot care nu mai poate fi eliminat,

- *zgomotul de cuantizare;*
- La destinație - demodulare: numerele sunt extrase din semnalul recepționat prin regenerare și decodare.
- imperfecțiunile canalului de comunicație, zgomotul care intervine în procesul de transmisiune precum și zgomotului de cuantizare \Rightarrow **erori**;
- secvența de numere - valorile eșantioanelor cuantizate și, în final, cu un filtru trece jos se reconstituie semnalul modulator.
- erorile pot fi reduse oricât de mult dar nu pot fi eliminate total;
- marele merit al modulației numerice constă în realizarea unei punți între domeniul analogic și cel numeric.
- *transmiterea informației analogice (audio, video etc.) poate beneficia de avantajele transmisiei semnalelor numerice eliberându-se, într-o mare măsură, de problemele legate de nelinearități, distorsiuni, perturbații.*

2. Procedee de modulație numerică

- *operația prin care se asociază coduri binare numerelor și un suport fizic codurilor reprezintă modulația propriu-zisă.*
- *simbolul .*
- Procedeu tipic - *modulația impulsurilor în cod* (MIC sau PCM de la *Pulse Code Modulation*) - A.H. Reeves - 1938.
- Alte procedee:

1. Procedee de modulație numerică diferențială (DNUM)

- *modulația diferențială a impulsurilor în cod (DPCM)*

- modulația delta (ΔM);

2. *Procedee de modulație numerică adaptivă*; realizează corespondența de la eșantion la alfabet funcție de istoria semnalului, starea S_n :

$$\begin{aligned} S_n &= g\{S_{n-1}, s[(n-1)T_e]\} \\ b_k &= f\{s(nT), S_n\} \end{aligned} \quad (3)$$

- parametri: R_s - simboluri/secundă sau baud și R_i - biți/secundă.

$$R_i [\text{biti/s}] = R_s \log_2 M \quad (4)$$

3. Eșantionarea

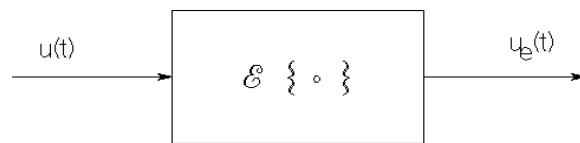


Figura 2

- eșantionare "cu menținere" (*sample-and-hold*) în care durata impulsului dreptunghiular $p_1(t)$ este egală cu perioada de eșantionare (T_e).

$$p_1(t) = \sigma(t) - \sigma(t - T_e) \leftrightarrow P_1(\omega) \quad (5)$$

- T_e îndeplinește condiția $T_e < \pi / \omega_M$.

$$u_e(t) = E\{u(t)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(nT_e) p_1(t - nT_e) \quad (6)$$

$$U_e(\omega) = \frac{1}{T_e} P_1(\omega) \sum_{n=-\infty}^{\infty} U(\omega - n\omega_e), \quad \omega_e = \frac{2\pi}{T_e} \quad (7)$$

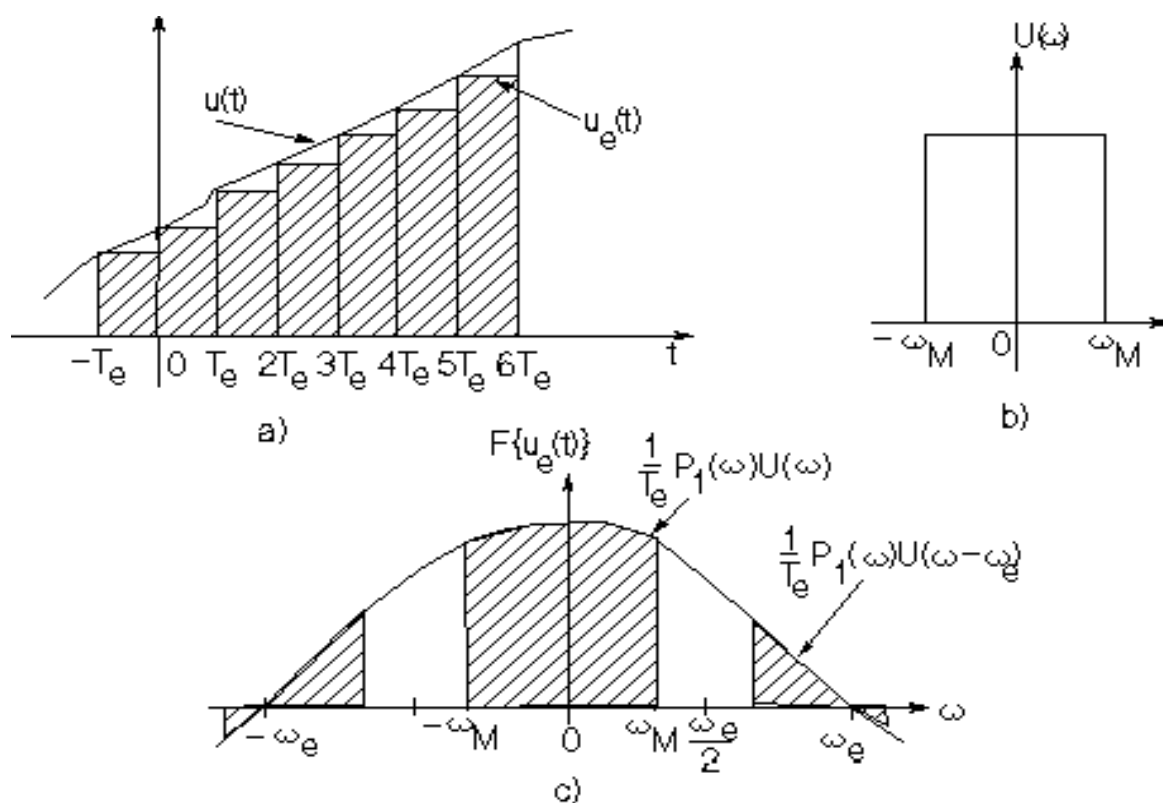


Figura 3

- distorsiuni liniare, inacceptabile - circuit de corecție:

$$H_c(\omega) = \frac{T}{P_1(\omega)}. \quad (9)$$

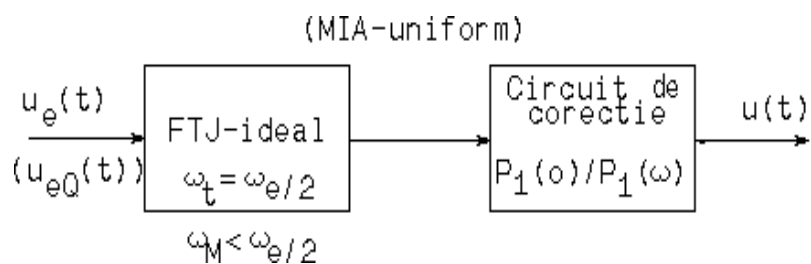


Figura 4

4. Cuantizarea

$$u_Q(t) = Q\{u(t)\} \quad (10)$$

- adică

$$U_Q(t) = b_k = \frac{a_{k-1} + a_k}{2} \quad (11)$$

- dacă

$$a_{k-1} \leq u(t) < a_k \quad (10)$$

- a_k aparține unui set A_{M+1} de $M+1$ valori care delimitează intervalele de cuantizare:

$$a_k \in A_{M+1}; \quad a_{k-1} < a_k < a_{k+1}, \quad k \in \overline{1, M-1} \quad (11)$$

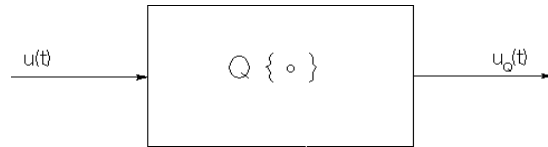


Figura 5

- se precizează setul A_{M+1} ;
- Tipuri de cuantizare: *uniformă* și *neuniformă*,
- secvență de numere rezultă pe baza unei *codări numerice*

$$u_Q(t) = b_k \Rightarrow k, \quad k \in \overline{1, M} \quad (12)$$

$$k = N \{ b_k \} \quad (14)$$

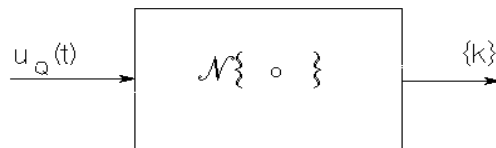


Figura 6

- Semnalul original se *reconstituie* prin decodare numerică; astfel pentru intervalul de timp $t \in \mathbf{R}$, în care se transmite numărul k , semnalul reconstituit este:

$$N^{-1} \{ k \} = b_k = u_Q(t) = \tilde{u}(t) \quad (13)$$

- În prezența *zgomotului* se *estimează* numărul transmis și se obține:

$$N^I\{\tilde{k}\} = \tilde{b}_k = \tilde{u}_Q(t) = \tilde{u}(t) \quad (17)$$

- Chiar și în absența zgomotului extern din cauza zgomotului de cuantizare:

$$\tilde{u}(t) \neq u(t) \quad (18)$$

- zgomotul de cuantizare este definit prin expresia:

$$z_Q(t) = u(t) - u_Q(t) \quad (19)$$

5. REALIZAREA INFORMAȚIEI NUMERICE

- Se disting două variante de realizare a semnalului numeric funcție de ordinea în care au loc operațiunile de eșantionare – cuantizare (figura 7).

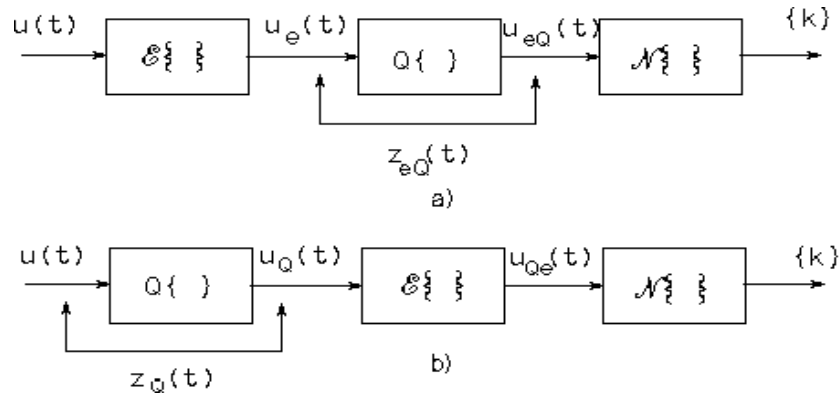


Figura 7

- Pentru prima variantă se scrie

$$\begin{aligned} u(t) &\rightarrow u_e(t) = E\{u(t)\} \rightarrow \\ &\rightarrow u_{eQ}(t) = Q\{u_e(t)\} \rightarrow \\ &\rightarrow N\{u_{eQ}(t)\} = N[Q\{u_e(t)\}] = k \in \overline{1, M} \end{aligned} \quad (14)$$

- iar pentru a doua

$$u(t) \rightarrow u_Q(t) = Q\{u(t)\} \rightarrow u_{Qe}(t) = E\{u_Q(t)\} \quad (21)$$

- Operatorii $Q\{\cdot\}$ și $E\{\cdot\}$ pot comuta.

$$u_{eQ}(t) = u_{Qe}(t) \quad (22)$$

- zgomotul de cuantizare:

$$z_Q(t) = u(t) - u_Q(t) = u(t) - Q\{u(t)\} \quad (23)$$

6. ZGOMOTUL DE CUANTIZARE PENTRU SISTEMELE CU CUANTIZARE UNIFORMĂ

6.1 Caracteristica de cuantizare

- pasul de cuantizare:

$$\Delta_k = a_k - a_{k-1}, \quad k \in \overline{1, M} \quad (24)$$

- cuantizarea *este uniformă* dacă:

$$\Delta_k = \text{constant} = \Delta$$

- dacă semnalul este caracterizat prin:

$$u(t) \in [-U_{\max}, U_{\max}]$$

- Este necesar

$$\Delta = 2 \frac{U_{\max}}{M}$$

- deci:

$$a_k = (2k - 1) \frac{\Delta}{2}, \quad k \in \overline{0, M} \quad (26)$$

$$b_k = a_k - \frac{\Delta}{2}$$

- respectiv:

$$b_k = (2k - 1 - M) \frac{\Delta}{2}, \quad k \in \overline{1, M} \quad (27)$$

- distorsiunea de cuantizare este caracterizată prin:

$$z_Q \leq \frac{1}{2} \Delta$$

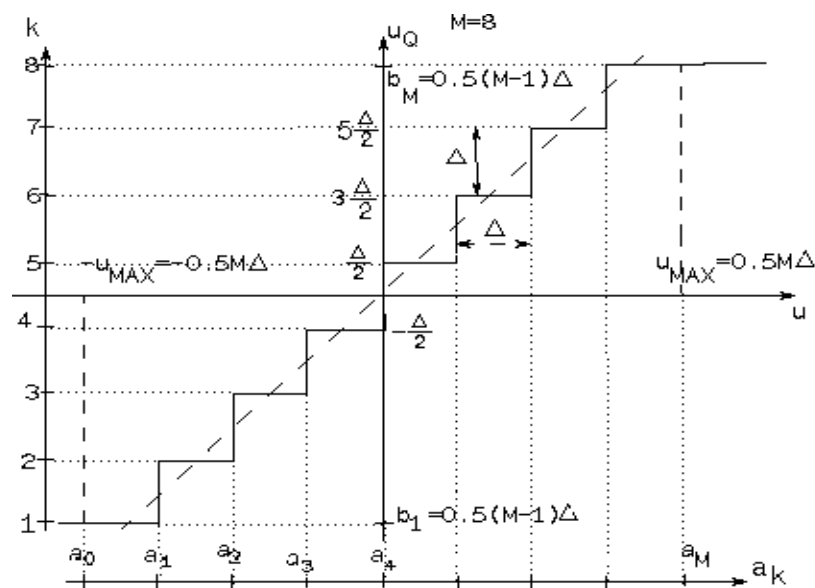


Figura 8

- dacă se depășesc cele două valori maxime ($|u(t)| > u_{MAX}$) are loc **o limitare la** $u = \pm 0.5(M-1)\Delta$.

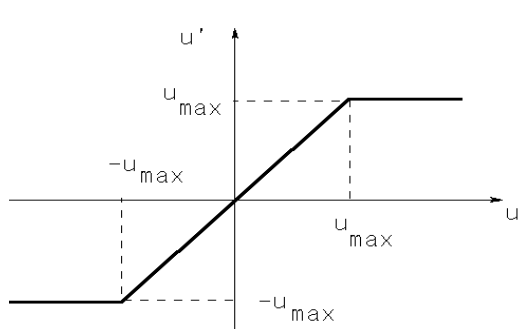


Figura 9

6.2 Analiza zgomotului de cuantizare

- determinarea raportului semnal-zgomot de cuantizare la ieșirea sistemului de regenerare;

- se va evalua puterea de zgomot folosind funcția densitate spectrală de putere a zgomotului de cuantizare.
- în cazul că semnalul numeric este format prin eșantionare prealabilă distorsiunea de cuantizare $z_{eQ}(t)$ este de forma MIA-uniform:

$$\begin{aligned}
 z_{eQ}(t) &\equiv u_e(t) - u_{eQ}(t) = \\
 &= \sum_n (u(nT_e) - Q\{u(nT_e)\}) p_I(t - nT_e) = \\
 &= \sum_n x_n p_I(t - nT_e); \quad |x_n| \leq \frac{\Delta}{2}
 \end{aligned} \tag{28}$$

- sunt necesare proprietățile statistice ale secvenței aleatoare $\{x_n\}$.
- acestea depind de semnalul prelucrat;
- Ipoteze simplificatoare:
 1. x_n are o distribuție uniformă în intervalul de cuantizare

$$p(x_n) = \frac{1}{\Delta} \tag{159}$$

2. valoarea medie:

$$E\{x_n\} = 0; \tag{30}$$

3. valori necorelate în intervale vecine:

$$E\{x_n x_m\} = 0 \text{ pentru } n \neq m \tag{31}$$

4. valoarea medie pătrată:

$$E\{x_n^2\} = \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} \frac{1}{\Delta} x^2 dx = \frac{\Delta^2}{12} \tag{32}$$

- calculul funcției densitate spectrală de putere:

- dacă procesul este *staționar* - perechea Fourier a funcției de autocorelație;
- dacă procesul nu este staționar se folosește același procedeu numai că se ia în considerație *funcția de autocorelație medie*.
- Aici funcția de autocorelație este:

$$\begin{aligned}
 r(t, \tau) &= E\{z_{eQ}(t + \tau) z_{eQ}(t)\} = \\
 &= \sum_n \sum_m E\{x_n x_m\} p_I(t + \tau - nT_e) p_I(t - nT_e) = \\
 &= \frac{\Delta^2}{12} \sum_n p_I(t + \tau - nT_e) p_I(t - nT_e)
 \end{aligned} \tag{33}$$

- se observă că

$$r(t + T_e, \tau) = r(t, \tau) \tag{34}$$

- deci procesul analizat este *ciclostacionar*.
- în acest caz:

$$\overline{r(\tau)} \equiv \frac{1}{T_e} \int_0^{T_e} r(t, \tau) dt = \frac{1}{T_e} \int_0^{T_e} \frac{\Delta^2}{12} p_I(t + \tau) p_I(t) dt \tag{35}$$

- rezultă:

$$\overline{r(\tau)} = \begin{cases} \frac{\Delta^2}{12} (1 - \frac{|\tau|}{T_e}) & |\tau| \leq T_e \\ 0 & |\tau| > T_e \end{cases} \tag{36}$$

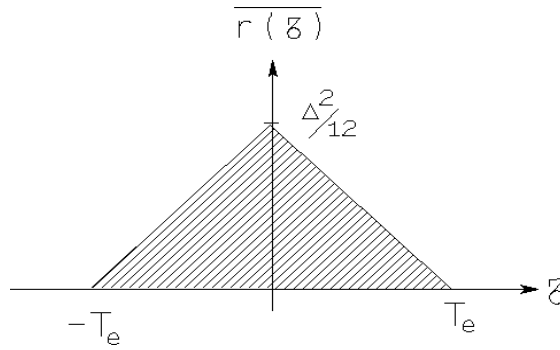


Figura 10

- de unde rezultă funcția densitate spectrală medie de putere,

$$\overline{W(\omega)} = \mathfrak{T} \{ \overline{r(\tau)} \} = \frac{\Delta^2 T_e}{12} \text{sinc}^2 \left(\frac{\omega T_e}{2} \right) \quad (37)$$

- Efectul zgomotului se evaluează la ieșirea sistemului de refacere deci după filtrul trece jos de recuperare care are frecvența de tăiere $f_e/2$ și după circuitul de corecție care are caracteristica de frecvență

$$H_c(\omega) = \frac{P_I(0)}{P_I(\omega)} = \frac{T_e}{P_I(\omega)}, \quad (38)$$

- aici:

$$P_I(\omega) = \frac{1}{j\omega} (1 - e^{-j\omega T_e}) = e^{-j\frac{\omega T_e}{2}} T_e \text{sinc} \frac{\omega T_e}{2} \quad (39)$$

$$P_I(0) = T_e$$

- Conform teoremei Wiener-Hincin, după filtrare $DSmP$ devine

$$\overline{W_f(\omega)} = \overline{W(\omega)} \left| \frac{P(0)}{P_I(\omega)} \right|^2 = \frac{\Delta^2 T}{12}, \quad |\omega| \leq \frac{\omega_e}{2} \quad (40)$$

- **așadar este vorba de un zgomot alb; zgomotul de cuantizare nu este, însă, și Gaussian deoarece $|z_{eQ}(t)| \leq \Delta/2$ deci este limitat !**

6.3 Raportul semnal-zgomot rezultat datorită cuantizării

- puterea zgomotului care apare în urma cuantizării:

$$P_{zQ} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\omega_e}{2}}^{\frac{\omega_e}{2}} \overline{W_f(\omega)} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\omega_e}{2}} \frac{\Delta^2 T_e}{12} d\omega = \frac{\Delta^2}{12}$$

- Puterea semnalului

$$P_s = U_{ef}^2$$

$$\xi_Q = \frac{P_s}{P_{ZQ}} = 12 \frac{U_{ef}^2}{\Delta^2} \quad (41)$$

- semnal sinusoidal $u(t) = U \cos \omega_m t$, pentru care

$$U_{ef} = \frac{U}{\sqrt{2}} \quad (42)$$

- notînd $U_{MAX} = 1/2 M \Delta$ adică $\Delta = 2U_{MAX}/M$, rezultă:

$$\xi_Q = 12 \frac{U^2}{2} \frac{M^2}{4 U_{MAX}^2} = \frac{3}{2} M^2 \left(\frac{U}{U_{MAX}} \right)^2 \quad (43)$$

- cu valoarea *maximă*

$$\xi_{Qmax} = \xi_Q|_{MAX} = \frac{3}{2} M^2 \text{ pentru } U = U_{MAX} \quad (44)$$

- se poate interpreta ca un semnal distorsionat cu *distorsiunea*

$$\delta_Q = \sqrt{\frac{P_{ZQ}}{P_s}} \geq \sqrt{\frac{1}{\xi_{QM}}} = \frac{0,82}{M} = \delta_{Qm} (\text{pt. } U = U_{MAX}) \quad (45)$$

Tabelul 1

M	8	16	32	64	128	256
$\delta_{Qm} \%$	10,2	5,1	2,55	1,28	0,64	0,32

6.4 Raportul semnal-zgomot instantaneu

- raportul între puterea instantanee $P_s(t)$ a semnalului analogic și puterea medie

P_{zQ} (constantă și independentă de semnalul transmis) a distorsiunii de cuantizare:

$$\xi_Q(t) \equiv \frac{p_s(t)}{P_{zQ}} = 12 \frac{u^2(t)}{\Delta^2} \quad (46)$$

- ținând cont de relația pentru pasul de cuantizare se deduce

$$\xi_Q(t) = 3 \left(\frac{u(t)}{U_{MAX}} \right)^2 M^2 \quad (47)$$

- logaritmice:

$$10 \lg \xi_Q(t) = 20 \lg M + 20 \lg \left| \frac{u(t)}{U_{MAX}} \right| + 4,7 \text{ [dB]} \quad (48)$$

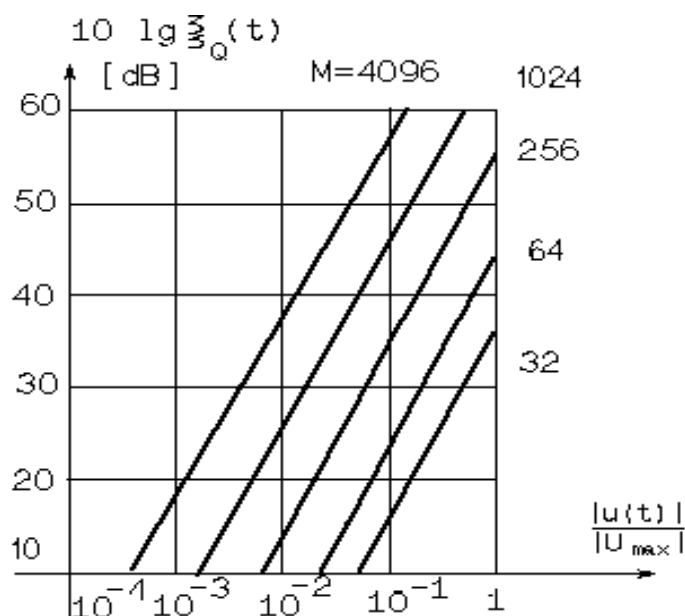


Figura 11

- concluzii:
 - raportul semnal-zgomot crește cu puterea a doua a amplitudinii normalizate a semnalului;
 - dublând numărul de nivele de cuantizare, M , și păstrând semnalul constant, raportul semnal-zgomot crește cu 6 dB.

▪ *Efectul limitării*

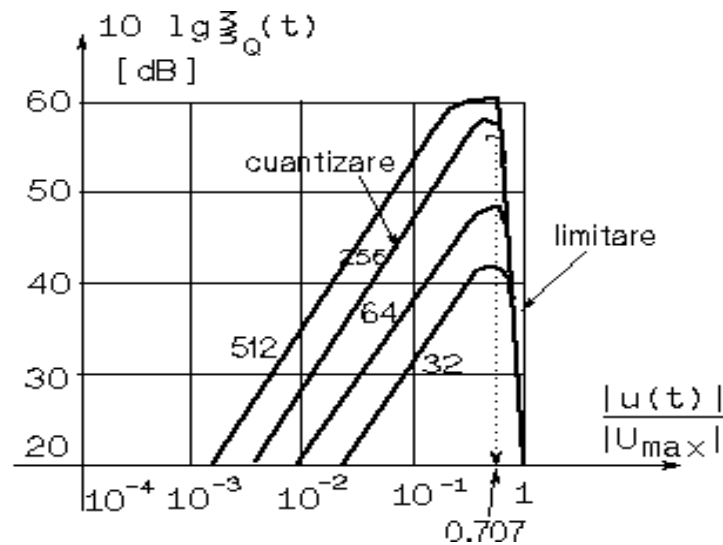


Figura 12 RSZ cu limitare pentru semnal sinusoidal

▪ raportul semnal-zgomot *rezultant*

$$\xi_{rez} = \frac{P_s}{P_{ZQ} + P_d} \quad (49)$$

- P_d reprezintă puterea componentelor armonice datorate limitării;
- *Efectul subiectiv al distorsiunilor rezultate în urma cuantizării este foarte diferit de cel al distorsiunilor rezultate prin efectul de limitare!*

7. Cuantizarea neuniformă

- dacă pasul de cuantizare este constant eroarea absolută maximă este $0,5 \Delta$ la orice nivel de semnal.
- deci raportul semnal-zgomot de cuantizare scade dramatic la semnale mici.
- soluție - **cuantizarea neuniformă**, $\Delta = \Delta(u)$.

7.1 Cuantizarea neuniformă ideală

- scopul urmărit:

$$\xi_Q = \text{constant}, \forall u(t) \quad (50)$$

- dacă se ține cont de relația pentru RSZ:

$$\xi_Q = 12 \left(\frac{u}{\Delta} \right)^2 \quad (51)$$

- rezultă că este necesar

$$\frac{\Delta(u)}{|u|} = \text{constant} \quad (52)$$

- concluzie - pentru $u \rightarrow 0$, $\Delta(u) \rightarrow 0$, deci, în varianta ideală, scopul propus nu poate fi atins!

7.2 Cuantizarea cu compandor-expandor

- realizarea sistemelor de cuantizare cu pas dependent de semnalul prelucrat este dificilă.
- soluție: schema bloc cu compandor – expandor dată în figura 13.

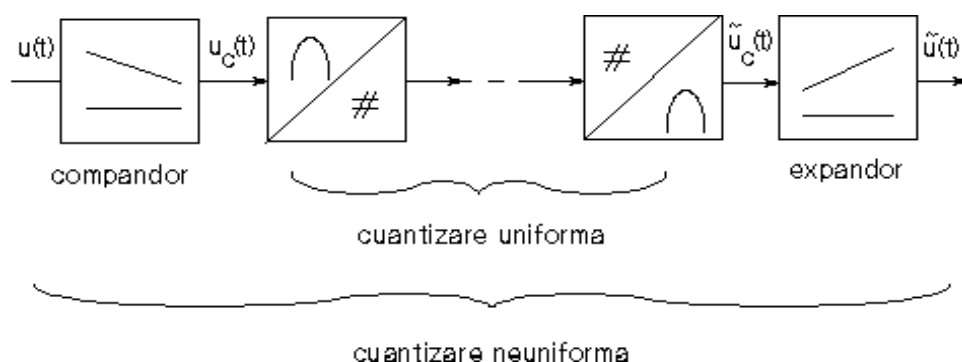


Figura 13

- compandorul;

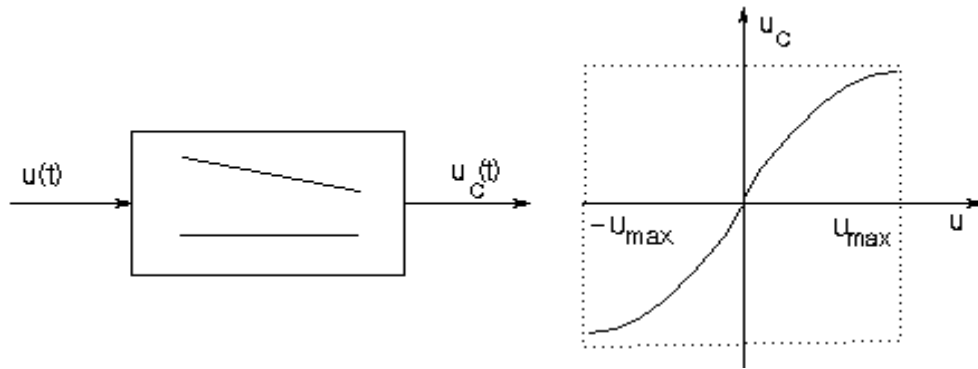


Figura 14

- refacere semnal - *expandorul* .

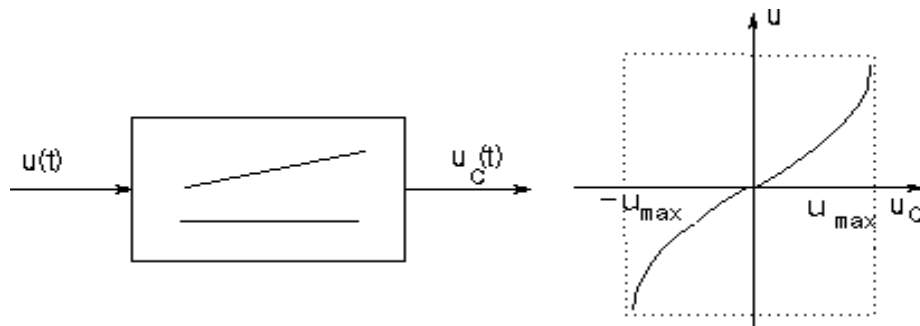


Figura 15

7.3 Caracteristica de compresie ideală

- evoluție semnal în schema bloc dată în figura 13:
 - compresie semnal analogic cu legea neliniară a compandorului, $F[\cdot]$:

$$u_c(t) = F[u(t)]$$

- transmisie numerică a semnalului comprimat, (*pasul constant* Δ_o);
considerând canalul fără zgomot, la recepție se obține

$$\tilde{u}_c(t) = u_{ceQ}(t) = Q[E\{u_c(t)\}] \quad (53)$$

- revenire la gama dinamică inițială a semnalului reconstituit

$$\tilde{u}(t) = F^{-1}[\tilde{u}_c(t)]$$

unde $F^{-1}[\cdot]$ reprezintă legea neliniară a expandorului.

- Observații:

- $$\frac{dF(u)}{du} > 0, \quad u \in [-U_{\max}, U_{\max}] \quad (54)$$

- se va considera $t=nT$, astfel încât operatorul E nu are nici un efect.
(timpul nu va mai fi precizat).

- Dorim să explicităm **operatorul $Q[\cdot]$ al cuantizării uniforme**.
- Conform legii de cuantizare:

$$x \in [a_k, a_k + \Delta_o), \text{ unde } a_k = (2k - M) \frac{\Delta_o}{2}, \quad k \in \overline{0, M} \quad (55)$$

- rezultă

$$Q[x] = a_k + \frac{\Delta_o}{2}. \quad (56)$$

- Cuantizarea se aplică semnalului comprimat, deci pentru

$$u_c \in [a_k, a_k + \Delta_o) \quad (57)$$

- rezultă

$$Q(u_c) = \tilde{u}_c = a_k + \frac{\Delta_o}{2} \quad (58)$$

- Conform figuri 16 se pot scrie corespondențele:

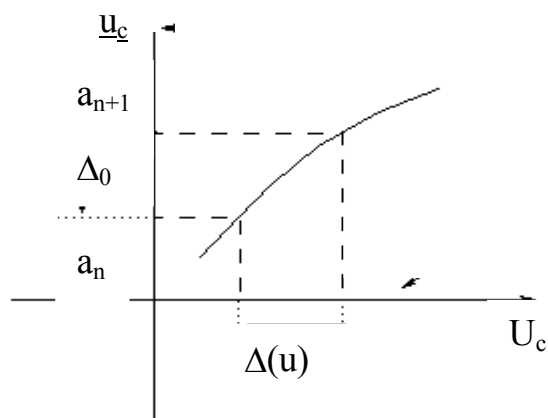


Figura 16

$$\begin{aligned} u_{c1} = a_k &\leftrightarrow F(u_1) = a_k \\ u_{c2} = a_k + \Delta_o &\leftrightarrow F(u_2) = a_k + \Delta_o \end{aligned} \quad (59)$$

- din care rezultă

$$\frac{F(u_2) - F(u_1)}{u_2 - u_1} = \dot{F}(u), \quad u \in \{u_1, u_2\} \quad (60)$$

- respectiv:

$$\frac{\Delta_o}{\Delta(u_1)} \approx \dot{F}(u_1) \quad (61)$$

- ideal este necesar:

$$\frac{\Delta(u)}{|u|} = \text{constant} = k^{-1}$$

- deci relația (60) poate fi scrisă

$$\dot{F}(u) = \frac{\Delta_o k}{|u|}, \quad \Delta_o, k > 0$$

- Prin integrare, pentru $u > 0$ rezultă legea de compresie ideală

$$F(u) = C_I + \Delta_o k \ln \frac{u}{U_{\text{MAX}}}, \quad u > 0$$

- Ținând cont de condiția la limită

$$F(U_{\text{MAX}}) = U_{\text{MAX}}$$

- rezultă

$$u_c = F(u) = U_{\text{MAX}} + \Delta_o k \ln \frac{u}{U_{\text{MAX}}}$$

- similar pentru $u < 0$ se deduce

$$u_c = F(u) = -U_{\text{MAX}} + \Delta_o k \ln \frac{-u}{U_{\text{MAX}}}$$

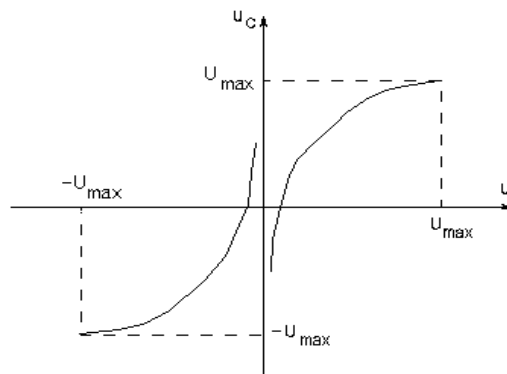


Figura 16

- normând

$$x = u/U_{MAX} \text{ și } y = u_c/u_{MAX}$$

- se obține :

$$y = 1 + \frac{\Delta_o k}{U_{MAX}} \ln x$$